J. K. Danö
stud. polyt.

Iver K. Damö

Regler for Tegneundervisningen.

Undervisningen er fordelt paa 3 Halvaar med bestemt Kursus i hvert; 4^de^ Halvaar optages af Examenstegning til 1^ste^ Del; i 5^te^ Halvaar udföre Maskiningeniörerne den större Maskinopmaaling til 2^den^ Del af Examen.

Övelserne i de 3 förste Halvaar ere saaledes fordelte.

Maskin- og Bygningsingeniörerne.

1ste Halvaar (Efteraar) 9 Timer ugentlig.

Frihaandstegning, Skrift og Krokering af Maskindele (1 Dag ugentlig).—

Geometrisk Tegning, Maalestokke, Projektionstegning Opgave 1–25 inklusive (det er dog tilladt at fortsætte i dette Halvaar indtil № 29 inkl.) (2 Dage ugentlig).—

2det Halvaar (Foraar) 12 Timer ugentlig.

Skygning og Farvelagning samt for Byg=

ningsingeniörerne Signaturtegning (2 Dage ugenlig).

Projektionstegning (Opg. 26–41) (2 Dage ugenlig). –

3die Halvaar (Efteraar) 9 Timer ugenlig.

Skruer, Tandhjul, 2 mindre og 2 större Opmaalinger samt Kopiering.

Övelserne i 3die Halvaar maa være sluttede inden Jul; i Januar finder Opmaaling Sted til Examenstegningen.

Fabriksingeniörerne.

1ste Halvaar (Efteraar) 9 Timer ugenlig.

Frihaandstegning, Skrift og Krokering af Maskindele (1 Dag ugenlig). –

Geometrisk Tegning, Maalestokke, Projektionstegning Opg. 1–25 inkl. (2 Dage ugenlig). –

2det Halvaar (Foraar) 6 Timer ugenlig.

Skygning og Farvelægning (1 Dag ugenlig).

Projektionstegning Opg. 31–34 inkl. (1 Dag ugenlig).

3die Halvaar (Efteraar) 9 Timer ugenlig.

Skruer, Tandhjul, 2 mindre og 2 större Opmaalinger samt Kopiering.

Övelserne i 3die Halvaar maa være sluttede inden Jul; i Januar finder Opmaaling Sted til Examenstegningen. –

Med Hensyn til Dagenes Fordeling til de forskellige Hold af studerende gælder for Tiden fölgende Skema.

Halvaar	Lokale №	Fag	Mand.	Tirsd.	Onsd.	Torsd.	Fred.	Lörd.
I	17–21	Projektionstegn.	abcd γδ	abcd γδ	AB	AB αβ	CD αβ	CD
	1–13	Frihaandstegn.	A α	B β	C	D γ	ab δ	cd
II	17–21	Projektionstegn.	abcd α	abcd β	AB γ	AB δ	CD	CD
	1–13	Skygning og Farvel.	AB β	AB α	CD δ	CD γ	abcd	abcd
III	Taget.	Tegning	ABab αβ	ABab α	CDcd γδ	CDcd γδ	CDcd βγδ	ABab αβ
IV	Taget.	Examenstegn.	ABCabc αβ	ABab γ	ACDacd αβ	ACDacd γδ	BDbd αβδ	BCDbcd γδ
V	Taget.	Examenstegn.	← Maskiningeniörerne →					

Udförelsen af Examenstegningerne til 1ste Del er henlagt til 4de Halvaar, dog saaledes at Opmaalingen finder Sted i Januar.

Opmaalingen sker den förste Dag under Kontrol i Hold paa c. 10 efter nærmere Aftale. Der opmaales i Löbet af 6 Timer en begrænset Del af Genstanden, som senere tegnes som Detailtegning. Den udförte Haandskitse afleveres med Navn og Dato til den kontrollerende.

Hovedtegningen skal afleveres inden Udgangen af Marts. Detailtegningen med Kalke inden Udgangen af April. Opgaven i Projektionstegning stilles i Begyndelsen af Maj og skal afleveres inden Udgangen af Maj; Maskin- og Bygningsingeniörerne skulle först afgive en skriftlig Besvarelse, til hvis Udarbejdelse der gives 4 Timer.

Maskiningeniörernes Opmaalingstegning til 2den Del skal afleveres inden Udgangen af Januar.

Tegningerne skulle have fölgende Dimensioner:

34½ × 26½ cm. Geom. Tegn., Projektionstegn. (undtagen №40), Skruer, cylindriske Tandhjul, Frihaandstegn., Skrift, Signaturer.—

34½ × 53 cm. Projektionstegn. №40, koniske Tandhjul, mindre Övelsesopmaalinger.

69 × 94 cm. större Övelsesopmaalinger.

47 × 69 eller 69 × 94 cm. Examenstegningerne.

<u>Maalene skulle holdes nöjagtigt.</u>

Övelsestegningerne skulle efterhaanden paategnes af Assistenterne; de mindre Tegninger afleveres til Docenten i et Antal af 4 ad Gangen i et Omslag med Navn foroven tilhöjre. Hvis Tegningerne ere löse, underskrives hvert Blad med Navn og Dato forneden tilhöjre, ere de indheftede i en Bog, behöver kun det sidste Blad at være underskrevet. De större Tegninger afleveres enkeltvis.

Alle Haandskitser til Opmaalingerne skulle afleveres underskrevne sammen med de tilhörende Tegninger.

Det er en Betingelse for at deltage i Undervisningen, at vedkommende er færdig med de foregaaende Halvaars Övelser, og har afleveret de paagældende Tegninger til Docenten.

I 1ste og 2det Halvaar maa ikke benyttes större Tegnebrædder end 50 × 66 cm., i 3die og 4de ikke större end 75×100 cm.

Hovedlineal maa ikke benyttes.

Tegnebrædder skulle være forsynede med Navn; de studerende maa ikke lade dem henstaa paa Tegnestuerne, naar de ikke ere Deltagere i Tegneundervisningen; de maa ikke henligge ubenyttede paa Bordene, men skulle sættes tilside, naar der ikke arbejdes ved dem.

Höjröstet Tale eller anden stöjende Adfærd maa ikke finde Sted paa Tegnestuen.

Gennemgang gennem Lærerværelset er ikke tilladt.

Nögler til Skufferne udleveres i Begyndelsen af Efteraarshalvaaret mod Forevisning af Adgangskort og Erlæggelse af 1 Kr i Depositum. De skulle afleveres eller ved Forevisning af Adgangskort til Foraarshalvaaret fornyes inden den 14' Februar, og alle afleveres inden Sommerferiens Begyndelse. For de Nögler, som ikke ere afleverede eller berigtigede i rette Tid inddrages Depositum, og Skufferne tömmes. Læreanstalten paatager sig intet Ansvar for de i saadanne Skuffer forefundne Sager.

De studerende ere ansvarlige for de Læreanstalten tilhörende Sager, som benyttes ved Undervisningen og i Tilfælde af Beskadigelse erstatningspligtige. Ved Udleveringen af saadanne Sager kan efter Omstændighederne forlanges Kvittering eller Depositum.

September 1901.

Tabel til Brug ved Skyggelægning.

$$B = \left(\frac{9}{10}\right)^n \cdot 100\,\% \quad \text{— B er Belysningsintensiteten.}$$

B'	B	n										
0	1,6	39	16+	8	4	2	2	2	2	1	1	1
10	8,9	23		8(÷)	4	2	2	2	2	1	1	1
20	20,6	15			4	2	2	2	2	1	1	1
30	31,4	11			~~2(4)~~	2+	2	2	2	1	1	1
40	38,7	9				~~2÷~~	2÷	2	2	1	1	1
50	47,8	7					~~2÷~~	2÷	2	1	1	1
60	59,1	5						~~2÷~~	2÷	1	1	1
70	72,9	3							~~2+~~	1+	1	1
80	81,0	2								~~1+~~	1+	1
90	90,0	1									~~1+~~	1
100	100	0										

Eks. En Flade har Belysningsintensiteten 30, den males tre Gange over med Tone 1 og derefter 4 Gange med Tone 2. (dog lidt for lys – 2 lidt mörkere den ene Gang) – (Kunde ogsaa males med Tone 1 – en Gang, 2 – een Gang og 4 – to Gange el. 8 een Gang)
n betegner det Antal Gange, man skal overskygge Fladen med Tone 1, hvis den brugtes hele Tiden.

Tone 8 faas af Tone 16 ved at spæde op med Vand til det dobbelte Volumen, o.s.v. Tone 1 forudsættes at have en saadan Styrke, at den borttager 10 % af Lyset, (~~meget~~ lys)
Man blander lettest Farverne saaledes: En meget lys Farve kaldes Tone 1, man maler en lang Strimmel med denne Farve, afsætter et Stykke ved den ene Ende, maler det övrige over en Gang til med samme Farve, man har nu Tone 2, man laver en Farve af samme Styrke som 2, afsætter nok et Stykke og maler det övrige over med den lavede Tone 2, der fremstilles som 2, har nu Tone 4, laves en Farve af samme Styrke, denne er Tone 4 o.s.v. — Ved at fölge Tabellen uden Correktion faas de Lysstyrker, som er angivne i 2den Colonne. For at faa dem man tilstræber (1ste Colonne) trækkes Tonen lidt mere mod Lyset, hvor der staar +, lidt mere fra Lyset, hvor der staar ÷. — (Tone 16 borttager 81,5 % af Lyset.)

J. K. Danø 1900
stud. polyt.

Vejledning
ved
Tegneundervisningen
paa
den polytekniske Læreanstalt.

Kjöbenhavn 1901.

Ved Tegneundervisningen fordres straks følgende Rekvisitter:

1. Bestik
2. Staallineal
3. Staaltrekant
4. Blyanter
5. Viskelæder
6. Tusch
7. Tuschkop
8. Tegnepenne
9. Penneknив
10. Tegnebog.

Som Regel ved Indkøbet gælder, at man bør købe hos Fagmænd, altsaa Instrumentmager=arbejde hos en Instrumentmager, Papir etc. hos en Papirhandler og ikke omvendt.

1. Bestikket bør være af første Sort; det gælder om dette som forøvrigt om alle Tegnerekvisitterne, at det dyreste er det billigste, fordi man derved sparer Tid og opnaar det bedste Resultat. Det kommer ikke an paa, at Bestikket indeholder mange Sager; men de, som findes, bør være for=

tinlige. Til at begynde med behöves kun en Haandpasser (Maalepasser), en Indsatspasser med Tilbehör (Ridsefjeder og Blyantskna samt Naale=kna og Forlangelsesben) og en Haandridsefjeder. Man kan altid supplere med enkelte Stykker; saaledes vil en Delepasser (Fjederpasser) være önskelig, naar man skal tegne Maalestokke, senere maaske en Faldpasser (Jomfrupasser).

Passerne bör have runde Spidser; hvis Benene ere af den gammeldags, trekantede Form bör ialfald den yderste Spids være sleben rund, for ikke at stikke for store Huller. Passerne bör have en jævn Gang paa hele Vandringen; dette op=naas bedst ved dobbelte Charnierer.

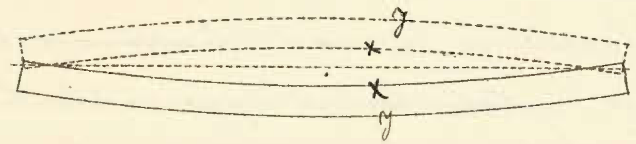
Ridsefjedrene bör være saa stærke i Kæber=ne, at disse ikke fjedre og lukke sig, naar de under Optrækningen trykkes lidt fast ind mod Linealen.

Det er ikke tilstrækkeligt, at det anskaffede Bestik er godt, det maa ogsaa behandles om=hyggeligt, saa at det altid er i fuldkommen Orden. Mangler, som kunne fremkomme ved Brug eller Uheld, bör straks afhjælpes ved en paalide=

lig Instrumentmager.

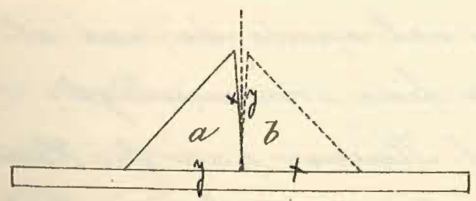
2 <u>Staallinealen</u> bör være tyk (c 5 m/m) for at lig=ge fast; men den bör være afskraaet paa den ene Side til en Randtykkelse af c. 2 m/m. En större Höj=de er ubekvem, naar den bruges til Optrækning med Ridsefjeder. Linealens Længde tages hensigts=mæssigt omtrent 800 m/m. (30").

Om Linealen er lige pröves ved at trække en Linie med



Blyant efter den og derpaa lægge den om i den punkterede Stilling. Trækkes da en ny Linie, som har to Punkter fælles med den förste, bör den helt falde sammen med denne. Er Linealen ik=ke retlinet, vil Fejlen vise sig fordoblet.

3. <u>Staaltrekanten</u> kan passende have en Hypo=thenuselængde af 260 m/m. Tykkelsen bör være c. 2 m/m. De to spidse Vinkler ere sædvanlig hver 45°



(til særligt Brug f. Eks. ved Tegning af Skruehoveder kan det være hensigts=mæssigt at have en

Trekant med Vinkler paa 30° og 60°).

Den rette Vinkel pröves ved Omlægning ved Hjælp af en rigtig Lineal. De to Linier, som trækkes efter Trekanten i Stillingerne a og b skulle falde sammen. En Afvigelse fra den rette Vinkel viser sig fordöblet.

Om Trekantens Sider ere retlinede pröves som ved Linealen.

4. Blyanter. Blyanterne bör være af udmærket Kvalitet; de bör være kantede for at ligge sikkert. A. W. Fabers almindelige sekskantede er et gammelt anerkendt Fabrikat. Heraf bruges № 3 og 4 (samt № 2 til Frihaandstegning). Endnu bedre, men ogsaa dyrere, er Blyanter af sibirisk Grafit fra samme Firma, samt de, som fabrikeres af Hardmuth under Mærket Kohinoor. Disse have andre Betegnelser for Haarhedsgraden; til de tre nævnte № 2, 3 og 4 svarer henholdsvis Mærkerne HB, F og HH.

Blyanterne bör holdes vel spidsede, saa at de tegnede Linier blive saa fine som muligt; № 3 benyttes til Tegning af Kurver paa fri Haand, den spidses med slank kegleformig Spids. Til

Linier, som trækkes efter Lineal, bruges № 4, som spidses slank kileformig, saa at der dannes en skarp Æg, der holder længere ved Brugen end en rund Spids. I Passerens Blyantsknæ bruges № 4 (eller et endnu haardere №); Spidserne göres her bedst spydformige, og det maa ved Indsætningen nöje paases, at den tegnende Æg staar vinkelret paa Cirklens Radius. Til Spidsning anvendes Kniv eventuelt en fin Fil eller fint Smergellærred, og til den sidste Afpudsning et Stykke almindeligt Tegnepapir.

5 Viskelæder. Til Udviskning af Linier bruges nu saa godt som udelukkende graat eller rödt Gummi. Til Radering af optrukne Linier bruges (foruden Kniv) ofte Gummi med indblandet Raderpulver af forskellig Art. Det maa her nöje paases, at det indblandede Pulver er saa fint, at det ikke sætter synlige Ridser i Papiret ved Brugen.

Viskelæderet bör ikke bruges saa energisk og vedholdende, at det bliver varmt ved Gnidningen; det vil ellers let smitte af paa Papiret i Stedet for at rense det.

6 Tusch. Der bör bruges ekstra godt, kinesisk Tusch i Stykker, som rives paa gammeldags Maade. Flydende Tusch har sjalden en god Farve og tilstopper let Ridsefjedren. Tuschen bör være smuk sort med brunligt Anströg; den tuckne Linie bör staa nogenlunde godt mod Vand, saa at den ikke löber ud, hvis Tegningen skal lægges over med Farve; ved Tilsætning af en ubetydelig Mængde tvekromsurt Kali, til den revne Tusch kan den iövrigt göres sikkrere i saa Henseende, idet da Limstoffet i Tuschen bliver uopløseligt, naar det udsættes for Lyset, men det medförer den Gene, at Tuschen ogsaa bliver uoplöselig, naar den stivner i Ridsefjederen (ligesom ved flydende Tusch).

Tuschen bör rives til den er fuldstændig sort; en god Pröve paa, om den er revet tilstrækkeligt er at helde Tuschkoppen, saa at en Draabe löber op ad en ren Flade paa samme; naar man da lader den löbe tilbage, skal Randen blive staaende skarp sort. Tuschen bör rives frisk hver Dag; men et Par Draaber Vand er tilstrækkelig til almindeligt Forbrug. Tuschstykket

aftörres omhyggeligt, naar man har revet færdig, da det ellers revner og giver Klumper næste Gang.

Ridsefjederen fyldes med Tusch ved at aande let i den i lidt aaben Tilstand og dyppe Spidsen i Tusch, som da trækker sig op imellem Kæberne.

7 Tuschkoppen bör være af hvidt Porcellan, fri for Knopper og ikke for lille; en Diameter af c. 45 m/m indvendig er passende. For at hindre for hurtig Fordampning og holde fri for Stöv e.t.c. er det heldigt at have en Glasskive til at lægge over eller bruge Tuschkopper med Fals, hvor den ene kan tjene til Laag for den anden. Tuschkopper med Vandfals ere ikke at anbefale.

8 Tegnepenne. Der anvendes Guillot's mörkeblaa Tegnepenne. Ved Brugen bemærkes, at Pennen kun dyppes paa Bagsiden og holdes aldeles fri for Tusch indvendig. Pennen föres saaledes, at den tegner med begge Spidser. Den jævneste Kurve faas, naar der tegnes med korte Medtræk saaledes, at Pennen flere Gange

kommer tilbage til samme Punkt; idet Linien hver Gang fortsættes lidt længere nedad; det maa naturligvis her paases, at man virkelig kommer tilbage i det tidligere Spor, saa at Linien ikke bliver for tyk eller endog zigzagformig. At tegne med lange Træk og fortsætte, hvor man slap sidst, er naturligvis hurtigere; men der fordres stor Rutine for at naa et nogenlunde godt Resultat, og udmærket bliver det saa godt som aldrig.

9 Penneknív. Penneknivеn, som bruges til Spidsning af Blyanter, til Beskæring af Tegninger og til Radering, bór være god og holdes godt sleben. Et godt Fabrikat er Rodgers (Sheffield).

Ved Rdering maa det iagttages, at man ikke raderer med Spidsen af Kniven paalangs af Linien, men derimod med det brede af Bladet og paatvers, ellers vil Raderingen blive synlig, medens det netop er en Betingelse, at den skal være absolut usynlig.

10 Tegnebogen. Tegnebogens Format skal være det til enhver Tid foreskrevne. Hvad Papiret angaar, da er ægte Whatmann stadig det bedste

men ogsaa det dyreste. Det paa Læreanstalten sædvanlig anvendte er „Ersatz für Whatmann", som ogsaa er godt og væsentlig billigere. Papiret bór ialfald være fast og glat.

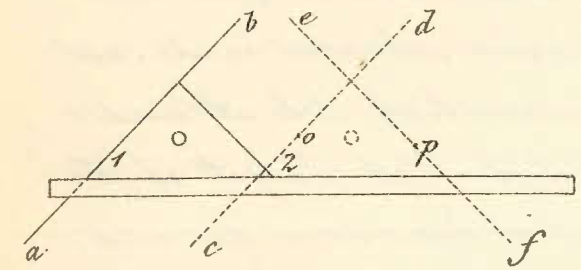
Ved den praktiske Tegning maa forskellige Omstændigheder tages i Betragtning, som ikke spille nogen Rolle ved den theoretiske Lósning af Konstruktionsopgaver. Der maa nemlig her tages Hensyn til de Fejl, som mere eller mindre klæbe ved enhver praktisk Maaling og Afsætning, og det gælder da om dels at góre den enkelte Fejl lille, idet man arbejder med saa stor Omhyggelighed, som muligt, dels at undgaa en Opsummering af Fejl. Ved Valget af Methoder maa man sóge at undgaa dem, der ved den praktiske Udfórelse give unójagtige Resultater.

Som Regler, der bór iagttages kan nævnes:

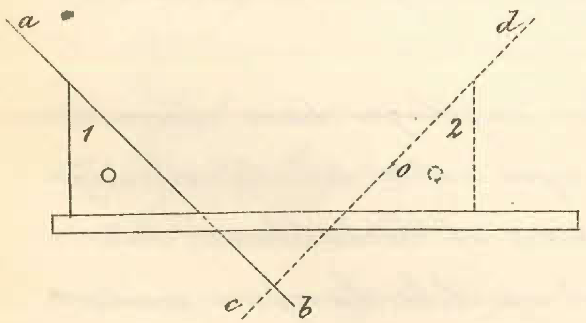
Naar en Passer bruges enten til Afsætning af Punkter eller til Tegning af Cirkelbuer, bór den holdes ved Charnieret og ikke længere nede paa Benene, da man ellers let kommer til at tykke den sammen, saa at Maalet bliver galt. Det er iövrigt en vigtig Betingelse for nöjagtig Tegning, at Passeren hverken er spændt for stramt eller for slapt.

Naar undtages de allerförste Øvelsestegninger, hvor rent mathematiske Konstruktioner bör anvendes, benyttes iövrigt Lineal og Trekant til Tegning af parallele og paa hinanden vinkelrette Linier, forudsat at Apparaterne ere nöjagtigt undersögte.

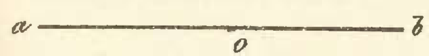
Forskydes Trekanten (med Hypothenusen langs Linealen) fra Stilling 1 til Stilling 2, er Linien c d parallel med a b gennem Punkt o, og Linien e f vinkelret paa a b gennem p.



Omlægges Trekanten fra Stillingen 1 til Stillingen 2, er Linien c d vinkelret paa a b igennem Punkt o.

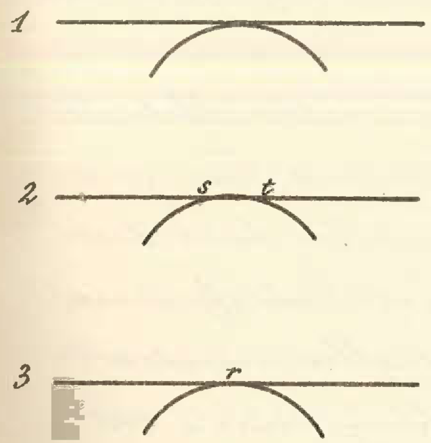


Det maa erindres, at selv den fineste tegnede Linie har en Tykkelse, og et afsat Punkt har Dimensioner. Naar en Linie skal gaa gennem et Punkt, maa den tegnede Linies mathematiske Midtlinie gaa gennem Punktets mathematiske Midtpunkt; Linien a b gaar ikke gennem Punktet o.

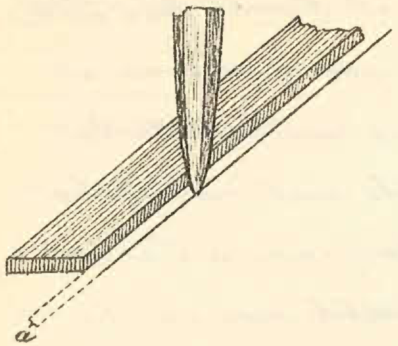


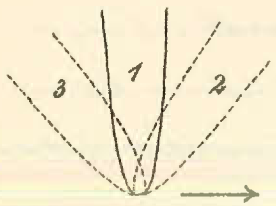
Skæringspunktet mellem to Linier ligger midt i begge.

En Tangent til en Kurve skal i Röringspunktet falde sammen med denne, saa at Tykkelsen her ikke bliver större end de enkelte Liniers. Tangenten maa altsaa hverken ligge udenpaa Kurven som i Fig. 1, eller skære den som i Fig. 2, men skal se ud som Fig. 3, idet Tykkelsen i Röringspunktet r er som den inddelte Linies. Skæring tilkendegiver sig ved at 2 Punkter s og t have normal Tykkelse.



Ved Tegning af rette Linier med Ridsefjeder maa denne föres nöjagtig parallel med sig selv og i en lodret Plan, parallel med dens Eg.





Linien trækkes altsaa ikke som ved Blyantstegning umiddelbart op ad Linialen, men i en Afstand fra denne, som afhænger af Ridsefjederens Form og Linealens Tykkelse. Denne Afstand avennes man hurtigt til at bedómme meget nójagtigt paa Øjemaal, saa at man er i Stand til at lægge Linealen i den rette Afstand fra Blyantslinien. I Ridsefjederens Fóringsplan kan dens Stilling rette sig efter, hvad der falder bekvemt. Nogle tegne med Ridsefjederen lodret (1); andre fóre den mere eller mindre heldende (2). Den maa dog aldrig helde i en saadan Retning, at Spidsen ved Optrækningen er foran Skaftet (3), da det giver en usikker Fóring.

Man bór undgaa at bygge den ene Konstruktion paa den anden. Skal f. Eks. en Række Punkter afsættes paa en ret Linie, bór man

om muligt bestemme dem ved Afsatning fra et eller nogle faa Punkter; derimod bór man ikke efterhaanden afsætte Afstandene fra Punkt til Punkt, hvorved man let kommer til at opsummere de enkelte Fejl. Ved almindelige Passere er der dog en Grænse for de Længder, der kunne afsættes i et Maal, idet Afsatningen bliver unójagtig, naar Benene staa meget skraat. Meget lange Maal maa derfor deles. Selv ved Afsatning af moderate Længder maa man tage Hensyn til den nævnte Omstændighed, idet man ikke trykker Passerspidsen skraat gennem Papiret, men fórst rejser Passerbenet, saa at Spidsen trykkes lodret ned.

Skal en Polygon tegnes kongruent med en anden og dens Punkter bestemmes ved skærende Buer, bór man som Centrer for Krydsbuerne helst, naar ikke andre Hensyn góre sig gældende, bruge de samme to fórst bestemte Punkter.

Skal man bruge en Række indbyrdes parallele Linier, som ikke kunne tegnes samtidig, men fórst Tid efter anden, bór man hver Gang lægge an ved samme Linie

Naar en Linie skal bestemmes ved to Punkter, bör disse, hvor man har Valget, tages saa langt som muligt fra hinanden. Navnlig naar Linien skal benyttes til Bestemmelse af nye Punkter, bör disse saavidt muligt falde indenfor dem, hvorved Linien selv er bestemt. Man undgaar derved en Multiplikation af den ved Afsætningen af Linien begaaede Fejl.

Undertiden faar man Brug for at dele en Linie af given Længde i et givet Antal ligestore Dele. Dette udförer man bedst ved at pröve sig frem med Passeren (Delepasseren). For ikke at forstikke den givne Linie afsætter man den först et andet Sted, f. Eks. paa et andet Stykke Tegnepapir, og forsöger der, om en efter Öjemaal valgt Passeraabning gaar op i Linien det rette Antal Gange. Hvis dette ikke er Tilfældet, forandres Passeraabningen lidt, og Forsöget gentages. — Under disse Forsög sætter man (for Mellempunkternes Vedkommende) ikke Passerspidserne i Linien, men tæt ved Siden af; derved kan man undgaa at Spidserne glide ned i de gamle Huller. — Först naar den rette Passeraabning er funden, pröves

den endnu en Gang med Passerspidserne midt i Linien og benyttes derefter til Inddeling af den givne Linie (Linien gennemvandres to Gange med Passeren, förste Gang med ganske fine Passerstik).

Man inddeler altid efter Primfaktorer; skal en Linie saaledes deles i 30 = 2 . 3 . 5 Dele, deler man den först i 5 Dele, hver af disse derefter i 3, o. s. v. Denne Methode er baade nöjagtigere og hurtigere, end en direkte Inddeling i 30 Dele.

Optrækningen maa ikke paabegyndes, för Blyantstegningen er helt færdig. (Da Tegningens [illegible] udlagt.

Punkter mærkes i Blyantstegningen ved at sætte en lille Blyantskreds om dem ○. Önsker man at fremhæve særlige Punkter eller at skelne mellem Punkter, der tilhöre forskellige Kurver, kan bruges andre Mærker △, □ udenom Punkterne.

I den optrukne Tegning angives Punkter ved to eller flere krydsende Linier, i Almindelighed de Linier, som ere benyttede ved Konstruktionen.

Optrækningen bör være fin, men fremfor alt ren; Finheden bör ikke overdrives paa Renhedens Bekostning. Linierne skulle alle have samme Styrke, naar der ikke er særlig Grund til at forandre denne. For at kunne genfinde den rette Styrke, bör man, naar Optrækningen paabegyndes, sætte en Pröve op paa et Stykke Papir for senere at bruge den til Sammenligning, naar man f. Eks. har fyldt nyt Tusch i Ridsefjederen.

Punkteringen bör være fin og ensformig; der bruges dog ikke Prikker, men ganske korte Streger. Mellemrummene mellem Stregerne bör være kortere end disse.

Som Regel for Optrækningen gælder, at ethvert konstrueret Punkt bör kunne maales efter paa den færdige Tegning uden at man behöver at tegne noget. Naar undtages de förste Tegninger, hvor Hjælpelinierne punkteres helt igennem, blive de kun angivne paa korte Stykker ved alle de Punkter, hvor de bruges. Hvor en Række Hjælpelinier gaa gennem samme Punkt, f. Eks. Frembringerne i en Kegle, bör de dog ikke alle angives ved dette, da det skader Tegningens Udseende og ikke gör nogen Gavn; man bör her indskrænke sig til nogle faa, hvorved Punktet er tilstrækkelig angivet.

[F.M.B.] I Konstruktion af kongruente Polygoner, regulære ind- og omskrevne Polygoner, Ovaler og Spiraler.

Dette Afsnit har (ligesom det fölgende) til Hensigt at give de studerende den förste Øvelse i at behandle deres Tegnerekvisitter paa rette Maade. Hvad det her alene kommer an paa er <u>Tegningens Nöjagtighed</u> samt <u>Optrækningen</u>. (Opgaverne i de fölgende Afsnit ere <u>tillige</u> Øvelser i Deskriptivgeometri).

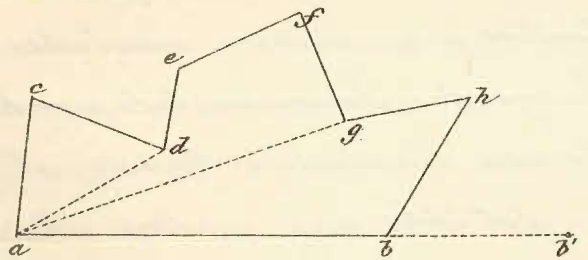
Hvad Optrækningen angaar bemærkes fölgende: alle fuldt optrukne Linier (saavel rette som krumme) bör i samme Tegning have samme Tykkelse saavel indbyrdes som over hele Længden; hvor to Kurver löbe over i hinanden, f. Eks. hvor en Cirkelbue fortsættes i en anden, saaledes at de have samme Tangent i Sammenstödspunktet, bör Overgangen ske paa en saadan Maade, at Overgangspunktet, hvis det ikke paa anden Maade er markeret, ikke umiddelbart kan iagttages.

De punkterede Linier kan göres en Smule tyndere end de fuldt optrukne; hvad der er sagt om de fuldt optrukne Linier gælder naturligvis ogsaa for de punkterede; Punkteringen maa være passende fin og <u>ensartet</u>, omtrent som vist i de følgende Tegninger.

Naturligvis vil man hurtigst naa til et godt Resultat, naar man straks anskaffer sig de bedst mulige Tegnerekvisitter, Bestik, Lineal og Trekant, samt sørger for kun at benytte <u>frisk-revet</u> og passende sort Tusch ved Optrækningen (Flasketusch maa ikke benyttes).

1, <u>Konstruktion af en Polygon kongruent med en given.</u>

Man tegner en Polygon omtrent som vist og konstruerer en dermed kongruent, (begge Figurer tilsammen bør fylde en Side i Tegnebogen); herved bemærkes, at naar Punktet c



er konstrueret f. Eks. ved Hjælp af Afstandene a c og b c, bør man ikke benytte c til Hjælp ved Konstruktionen af et af de andre Punkter, idet en

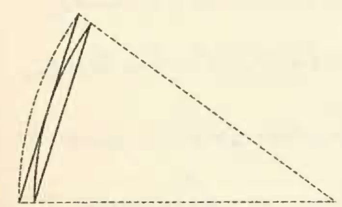
Fejl i c's Beliggenhed da overføres til det omtalte Punkt.

Faar man ved Bestemmelsen af f. Eks. h daarlig Skæring mellem Buerne med Centrer i a og b, kan man vælge sig et Punkt b' paa Linien a b og bestemme h fra b og b'.

Ved Optrækningen trækkes Polygonen fuldt op, medens man punkterer alle Diagonalerne fra en af Vinkelspidserne.

2, <u>Konstruktion af en ind- og omskreven regelmæssig Polygon (Tikant).</u>

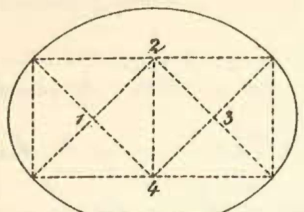
Tegningen gøres saa stor, at den fylder en Side i Tegnebogen.



Optrækningen skal være som vist i Fig., man maa her især paase, at en Kurve og dens Tangent <u>falde sammen</u> i Røringspunktet.

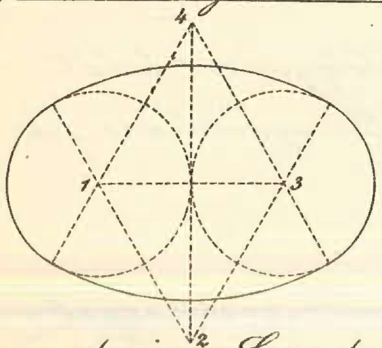
3, <u>Konstruktion af en Oval. (kun selve Ovalen trækkes op, alt det øvrige punkteres).</u>

a, over to Kvadrater.



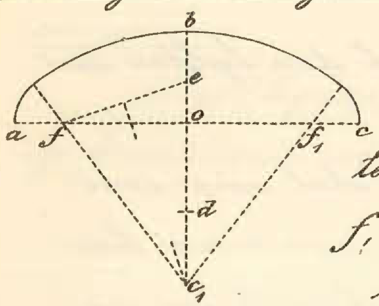
Punkterne 1, 2, 3 og 4 ere Centrer for de fire Cirkelbuer, hvoraf Ovalen sammensættes.

b, over 3 kongruente Cirkler.



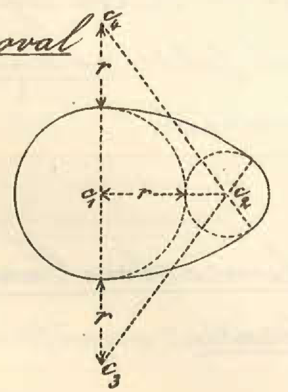
Punkterne 1, 2, 3 og 4 ere Centrer for de 4 Cirkelbuer, hvoraf ogsaa denne Oval bestaar.

c, med given Længde og Bredde.



ac og bd ere givne. Man afsætter af = be (idet be er valgt omtrent lig $\frac{1}{2}$ bo); paa Midten af ef oprejses en vinkelret, herved bestemmes c_1. f, c_1 og f_1 ere Centrer for de 3 Cirkelbuer, hvoraf den tegnede Halvdel bestaar.

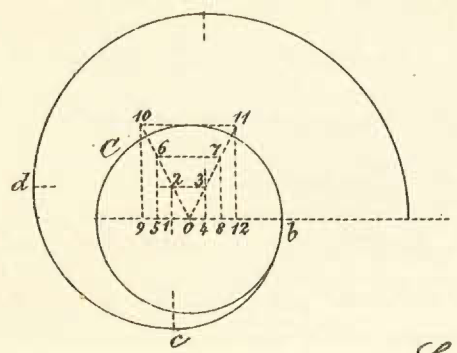
d, Ægoval



c_1, c_2, c_3 og c_4 ere Centrer for de fire Buer. Konstruktionen forstaas let, idet Radius i den lille Cirkel er halv saa stor som i den store, og Afstandene fra c_1 til c_3 og c_4 ere angivne paa Fig.

4, Konstruktion af en Spiral (kun selve Spiralen trækkes fuldt op).

a, o, der vælges lidt tilvenstre for Tegnepapirets Midte, er Centrum for en Cirkel C, hvis Diameter er lidt mindre end $\frac{1}{9}$ af Papirets Bredde.

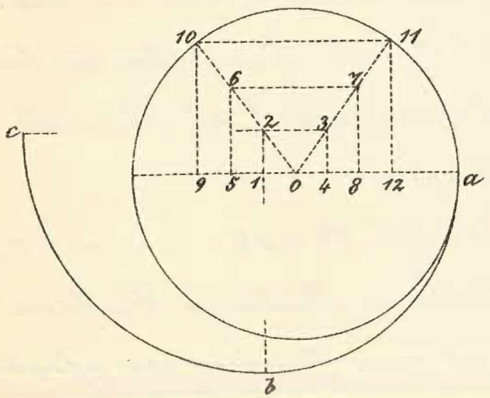


$01 = 15 = 59 = 04 \ldots\ldots = \frac{1}{6} r$, idet r er Radius i Cirklen.

Efter at disse Punkter ere afsatte, tegner man med 1 som Centrum en Cirkelbue bc gennem b, med 2 som Centrum en Cirkelbue cd, idet d ligger i Linien 23 o.s.v.

Sættes $r = 1$, bliver Radius i Cirkelbuen med Centrum i 1 lig $1 + \frac{1}{6}$, Radius i Buen med Centrum i 2 lig $1 + \frac{1}{6} + \frac{2}{6}$ o.s.v., fortsættes paa denne Maade, kan man let finde Afstanden fra b til de Punkter, hvori Buerne med Centrer i 4, 8 og 12 skære den vandrette Diameter i Cirklen, disse Punkter afsættes, og man sørger for, at Spiralen kommer til at gaa nøjagtigt derigennem. Man gør bedst i at begynde med at tegne den største Cirkelbue først og derpaa fortsætte indefter.

b, Punkterne 1, 5, 9, 4, 8 og 12 ere afsatte saaledes, at $(0-1) = (1-5) = (5-9) = (0-4) \ldots\ldots = \frac{1}{3} r$, idet r er Radius i Cirklen.



Buen ab har Centrum i 1, Buen bc i 2; fortsættes paa denne Maade, faas Spiralen.

Sættes $r = 5$, ses let, at $(9-10) = 4$, $(5-6) = \frac{2}{3} \cdot 4$, $(1-2) = \frac{1}{3} \cdot 4$, og man finder nu paa samme Maade som paa forrige Side Radierne i de forskellige Cirkelbuer og ser da, at Buerne med Centrer i 8 og 12 skære Cirklens vandrette Diameter i Punkter, hvis Afstande fra a ere henholdsvis lig $4r$ og $8r$. Disse Punkter afsættes först, og man begynder med at tegne den störste Cirkebue först, hvorpaa man fortsætter ind mod a.

Man maa valge Cirklens Diameter saaledes, at man, naar o ligger midt paa Papiret, faar Plads til begge de omtalte Punkter.

[F.M.B.] II Konstruktion af Keglesnit, cykliske Kurver, Lemniskaten og Brændlinien for en Cirkel.

I Modsætning til de Kurver, vi have haft med at göre i det foregaaende Afsnit, ere disse ikke sammensatte af Cirkelbuer, Konstruktionen maa da ske, idet man ved Hjælp af givne Egenskaber ved den behandlede Kurve finder et tilstrækkeligt Antal Punkter og dernæst paa fri Haand forbinder disse med en Kurve. Hvor Kurven er stærkt krummet, maa de konstruerede Punkter ligge nærmere ved hinanden, end hvor Krumningen er svagere, i Alm. vil en Afstand af ca. 1 cm. mellem to paa hinanden fölgende Punkter være passende. Kurven bör staa fuldstændig jævn og ren i Blyant inden Optrækningen; man maa ikke göre Regning paa at göre Forbedringer ved denne.

Optrækningen sker ved Hjælp af Tegnepen; denne maa kun befugtes med Tusch paa sin Bagflade, medens det indvendige af Pennen holdes fri derfor.

Pennen holdes under Optrækningen saaledes, at den tegner med begge Spidser.

Optrækningen sker bedst ved at före Pennen i korte Bevægelser og saaledes, at man kommer mange Gange gennem samme Punkt; derved udjævnes Uregelmæssighederne.

Efter Viskningen maa man efterhjælpe paa de Steder, hvor Kurven er for tynd eller maaske helt udvisket; den færdige Kurve maa ikke være tykkere end en med Ridsefjeder optrukken Linie.

1, Konstruktion af Keglesnit.

a, Ellipsen.

Man vælger f. Eks. de fire Toppunkter og finder ved Hjælp heraf Brændpunkterne.

Konstruktionen af Punkterne sker derpaa ved Cirkler om Brændpunkterne.

Naar Kurven er tegnet, konstrueres ved Hjælp af bekendte Sætninger Tangenten til Kurven i et af de fundne Punkter samt de to Tangenter fra et givet Punkt med deres Röringspunkter. Kun Kurven og Tangenterne trækkes fuldt op, alle Hjælpekonstruktioner punkteres. Hvad der her er sagt om Tangenter og Optrækning

gælder ogsaa de to fölgende Opgaver.

Figuren skal være saa stor, at den fylder en halv Side i Tegnebogen.

b, Parablen.

Parablen er givet ved Brændpunkt og Ledelinie; disses indbyrdes Afstand er ca. 2 Tommer. Aksen vælges paa tvers af Papiret.

c, Hyperblen.

Denne kan f. Eks. være givet ved sine Toppunkter og Asymptoter. Konstruktionen af Punkterne sker ligesom ved Ellipsen ved Cirkler om Brændpunkterne.

№ 2, Cykloider.

a, Den simple Cykloide.

Denne Kurve beskrives af et Punkt, der fölger i fast Forbindelse med en Cirkel, der ruller paa en ret Linie.

Lad a (se Fig. næste Side) være det beskrivende Punkt, der fölger med Cirklen C, der ruller paa F (Grundlinien) (Fig. 1). Hvis vi vilde finde det Punkt a', hvori a befinder sig i det Øjeblik, da det vilkaarlige Punkt b af Cirklen rører den givne rette Linie, har man til Bestemmelse af a': $\smile ab = \smile a'b'$, altsaa $a'b \neq ab'$; endvidere indses let, at $a''b = a'b''$.

Fig. 1.

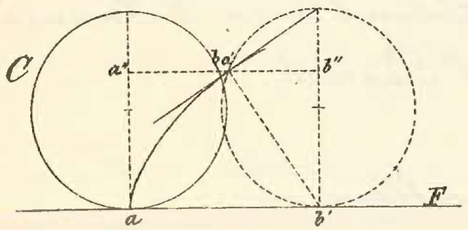
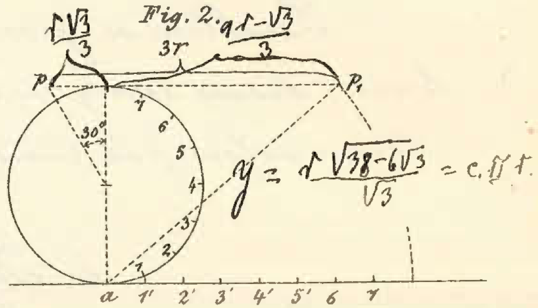


Fig. 2.

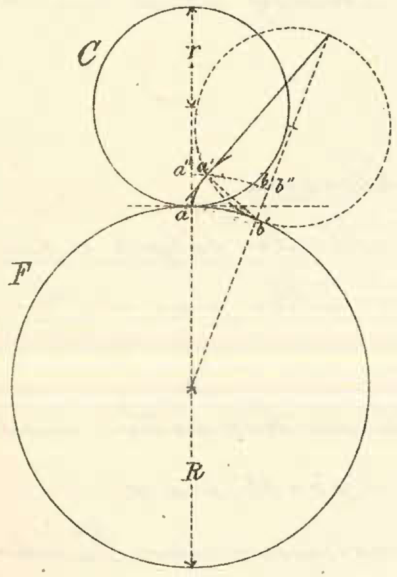


Tangenten i a' er vinkelret paa $a'b'$; i Punktet a er den lodrette Linie Tangent.

For at finde et tilstrækkeligt Antal Punkter af Kurven, deler man Cirklen i f. Eks. 16 ligestore Dele ved Punkterne a, 1, 2, 3 ...... (Fig. 2) og afsætter de tilsvarende Stykker ud ad Grundlinien; dette sker ved Hjælp af den i Fig. 2 viste Konstruktion; ap_1 er nemlig lig den halve Periferi (indses ved Beregning); man kan nu afsætte Punkterne 1′, 2′, 3′..... paa Grundlinien, hvorpaa Konstruktionen let udføres. —

NB. b, Epicykloiden.

Denne beskrives af et Punkt, der følger i fast Forbindelse med en Cirkel C, som ruller udvendig paa en anden Cirkel F.



Konstruktionen sker paa lignende Maade som ved Cykloiden: $\smile ab = \smile a'b' = \smile ab'$. Det indses let, at Punkterne a'', a', b og b'' ligge paa en Cirkel, koncentrisk med den faste, og at $\smile a'b'' = \smile a''b$.

Kan man altsaa blot afsætte $\smile a'b' = \smile ab$, kan Konstruktionen udføres.

Tangenten i a' er vinkelret paa $a'b'$; i a er Tangenten lodret.

Hvis man specielt vælger $r = \frac{1}{3}R$ eller $r = \frac{1}{4}R$, kan Punkterne b' konstrueres nøjagtigt, idet man f. Eks. i første Tilfælde deler den lille Cirkel i 20 lige store Dele, den store i 60.

№ c, Hypocykloiden.

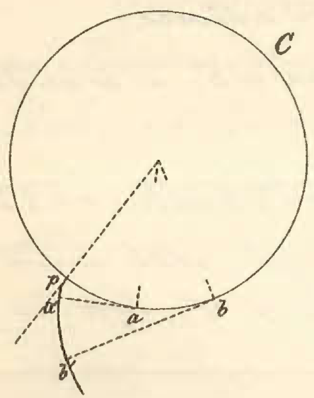
Denne Kurve beskrives af et Punkt, der følger i fast Forbindelse med en Cirkel, der ruller indvendig i en fast Cirkel.

Konstruktionen er ganske analog med Epicykloidens.

№ d, Cirkelafvikleren.

Denne beskrives af et Punkt, der følger i fast Forbindelse med en Tangent, der ruller paa en Cirkel.

Er p det Punkt, som Afvikleren har fælles med Cirklen, skal altsaa $\smile pa = aa'$, $\smile pb = bb'$ o.s.v.

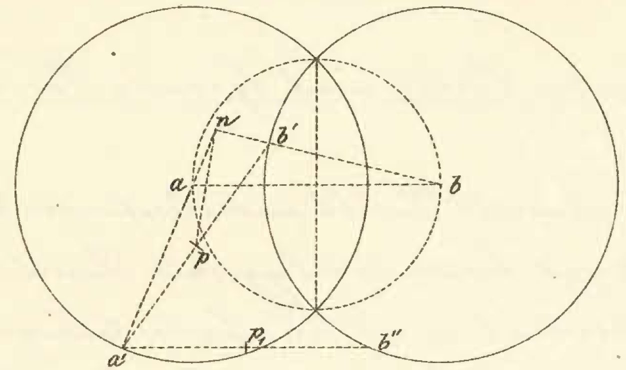


Man konstruerer nu Punkterne a'b'..... saaledes: man lader p, a, b, c ..... dele Cirklen i f. Eks. 20 lige store Dele; kaldes Perifirien P, er da $aa' = \frac{1}{20} P$, $bb' = \frac{2}{20} P$....., og for at finde P kan man benytte den under „Cykloiden" viste Methode.

Tangenten i f. Eks. b' er vinkelret paa bb'

№ 3, Lemniskaten.

To lige store Cirkler med Centrer a og b skære hinanden orthogonalt, en ret Linie a'b' af Længde lig



ab glider med sine Endepunkter paa de to Cirkler, dens Midtpunkt p beskriver da Lemniskaten.

Lade vi for et Øjeblik a' være det ene Endepunkt af den glidende Linie, kan det andet Endepunkt, idet det skal ligge paa den anden Cirkel, enten være b' eller b". Midtpunktet p, af a'b" ses let at beskrive en Cirkel, kongruent med den givne; det er altsaa Punktet p, der beskriver Lemniskaten.

Tangenten i p faas ved Hjælp af følgende Sætning: naar en plan Figur bevæger sig i sin Plan, ville alle dens Punkter i samme Øjeblik beskrive Baneelementer, hvis Normaler gaa gennem samme Punkt. I Fig. kender man nu Normalerne til Baneelementerne, som a'b' beskrive, nemlig aa' og bb', der skære hinanden i n. Tangenten til

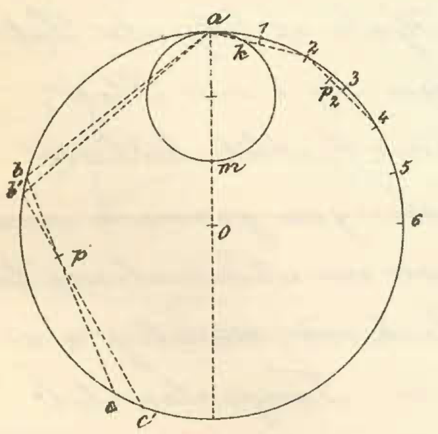
Lemniskaten i p er altsaa vinkelret paa pn.

NB 4, Brændlinier.

a, Brændlinien for en Cirkel med lysende Punkt paa Periferien.

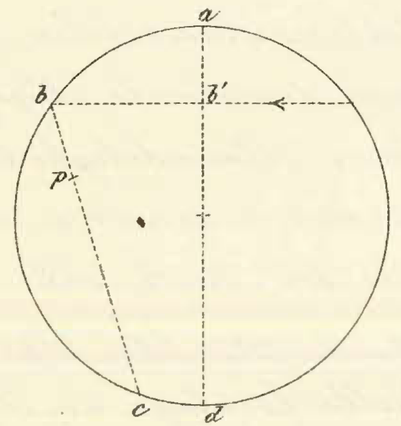
Lad a være et lysende Punkt paa Periferien b og b' to uendelig nær ved hinanden liggende Punkter af samme. Lysstraalerne ab og ab' ville kastes tilbage henholdsvis til c og c', de tilbagekastede Straaler skære hinanden i et Punkt p. Gik vi nu videre til den næste Straale o. s. fr., vilde Punkterne p danne en Kurve, den saakaldte Brandlinie.

Man kan bevise, at $bp = \frac{1}{3}\, bc$; for at konstruere Brandlinien deler man nu Cirklen ved Punkterne 1, 2, 3 .... i f. Eks. 24 lige store Dele, samt tegner den mindre Cirkel, hvis Diameter $\overline{am}$ er lig $\frac{1}{3}$ af Diameteren i den givne Cirkel. Lysstraalen a 2 kastes tilbage til 4, og Punktet p_2 af Brandlinien faas,



idet $2p_2 = ak$. Tangenten i p_2 er selve den tilbagekastede Lysstraale.

NB b, Brandlinien for en Cirkel med lysende Punkt uendeligt fjærnt.



Lysretningen er angivet ved Pilen.

Lysstraalen gennem b kastes tilbage til c, idet $\smile bc = 2 . \smile ab$. Brandlinien opstaar nu paa samme Maade som beskrevet i forrige Opgave.—

Punktet p, hvori den søgte Kurve tangerer den tilbagekastede Straale, er her saaledes beliggende, at $bp = \frac{1}{4}\, bc = \frac{1}{2}\, bb'$, idet ad er en Diameter, vinkelret paa Lysretningen.

NB

[FMB]

III Maalestokke.

Skal man udføre en Arbejdstegning eller en Tegning efter en Opmaaling af en eller anden Genstand, er det saa godt som altid nødvendigt at formindske alle Dimensionerne i et passende Forhold. For at udföre dette hurtigt og nöjagtigt, konstruerer man sig i hvert enkelt Tilfælde en Maalestok, hvis Enheder er en Brökdel af de virkelige Længdeenheder.

Det fölger af Maalestokkens Anvendelse, at den maa være konstrueret med den störste Nöjagtighed; dens hele Længde bör i Almindelighed ikke være större, end at den kan rummes i en almindelig Passer. Endvidere bör Maalestokken altid være indrettet saaledes, at man kan tage Maal paa den uden at skulle foretage en Regning i Hovedet, selv om denne er meget simpel; derfor bör de paaskrevne Chiffre altid svare til Chiffrene i de Maal, man tager. Den nærmere Indretning af en saadan Maalestok maa naturligvis ogsaa rette sig efter den Nöjagtighed, hvormed man i hver enkelt Tilfælde forlanger at kunne maale vedkommende Genstand.

Vi ville for at lette Forstaaelsen vise Maalestokkens Indretning i et Par enkelte Tilfælde:

1, Den simple Maalestok paa en enkelt Linie.

Lad os tanke os, at vi skulle tegne en Tegning i Maalestoksforholdet $\frac{1}{n}$, og at Maalene f. Eks. fordres angivne med en Nöjagtighed af a (a er en Længde). Hvis vi nu med tilstrækkelig Nöjagtighed kunne afsætte $\frac{1}{n} \cdot a$ udad en Linie, kunne vi benytte en Inddeling paa denne som Maalestok.

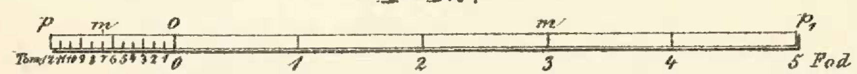
Lad os f. Eks. antage, at $\frac{1}{n} = \frac{1}{12}$, og at Maalene skulle angives med 1 Tommes Nöjagtighed (a = 1 Tom.); vi have da:

1 Fod viser sig lig 1 Tom.

6 " " " " 6 Tom.

Maalestokken tegnes nu som nedenfor vist,

1:12.

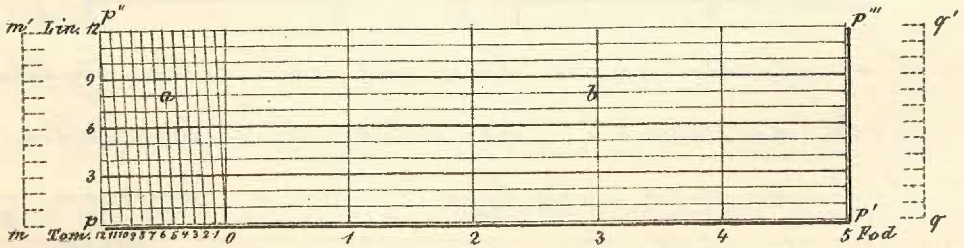


idet vi afsætte pp_1 = 6 Tom. og dele dette Stykke i 6 Dele (se Side XIV), der altsaa hver forestiller 1 Fod (vi maa ikke tage 1 Tom. i Passeren og afsætte den 6 Gange, da vi herved multiplicerer en Fejl i det tagne Maal med 6). Delingspunkterne mærkes som vist med Tallene 0, 1, 2 ....; dernæst deles Stykket o–p tilvenstre for Nulpunktet i 12 lige store Dele, der hver repræsenterer 1 Tom., og de mindre Tal paaskrives, hvorpaa Maalestokken er færdig til Brug; f. Eks. er Stykket $m\,m = 3'7''$.

2, Transversalmaalestokken.

Tænke vi os, at Maalene i ovenstaaende Eksempel skulde være angivne med en Linies Nöjagtighed i Stedet for med en Tommes, skulde vi have delt hvert af de smaa Stykker til venstre for Nulpunktet i 12 lige store Dele; dette kan ikke godt lade sig göre, hvorfor vi konstruere os en Maalestok saaledes som vist i Fig.; dens Anvendelse vil let forstaas; f. Eks. er Stykket $a\,b = 3'5''8'''$.

1:12.



Angaaende Konstruktionen bemærkes fölgende:

Vi begynde med at tegne den vandrette Linie $m\,q$; gennem tö vilkaarlige Punkter m og q

($m\,q > 6''$) af denne trækkes to parallele Linier $m\,m'$ og $q\,q'$, og ud ad disse afsættes fra m og q 12 vilkaarlig valgte lige store Dele til Punkterne m' og q' ($m\,m' = q\,q'$), og de 12 vandrette Linier drages nöjagtigt gennem Delingspunkterne, derpaa afsættes $p\,p'$ og $p''p''' = 6''$, idet man sörger for, at $p\,p''$ er lodret; de inddeles ligesom i det foregaaende.

Ved Optrækningen trækkes kun selve Maalestokken op og udstyres som vist; de i Fig. punkterede Hjælpelinier tegnes kun i Blyant.

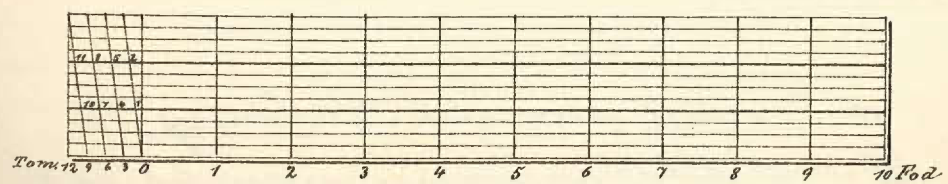
Konstruktion af en Maalestok i Forholdet $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{4}$ Tommes Nöjagtighed.

1 Fod viser sig lig $\frac{1}{2}$ Tom.

11 " " " " $5\frac{1}{2}$ Tom.

Maalestokken indrettes som vist, idet Konstruktionen foretages paa lignende Maade som ved den forrige.

1:24.



Denne Maalestok er indrettet paa en særegen Maade. Ved den foregaaende, der er indrettet efter den almindelige Regel, svarer hvert Punkt paa en Transversal til det Antal Tommer, som Tallet ved dens nederste Ende=punkt angiver, medens Antallet af Linier an=gives ved den vandrette Linies Nummer. Ved denne Maalestok svarer hvert Punkt paa en Transversal derimod til det Antal Tommer, som angives af det Tal, der staar nærmest under vedkommende Punkt og paa samme Transver=sal, medens Antallet af $\frac{1}{4}$-Tommer angives ved den vandrette Linies Nummer, regnet fra det med ovennævnte Tal mærkede Punkt paa Transversalen.

IV Dobbelt retvinklet Afbildning, skraa Afbildning og retvinklet axonometrisk Afbildning.

a, Dobbelt retvinklet Afbildning.

Denne Afbildningsmaade anvendes saa

godt som altid ved Tegninger til praktisk Brug. Ethvert Punkt bestemmes her ved sin retvinklede Projektion paa to paa hinanden vinkelrette Planer, som i Almindelighed tænkes lodret og vandret og derfor benævnes lodret og vandret Bil=ledplan (L og V). Deres Skæringslinie kaldes Grundlinien (G) eller Projektionsaksen.

Fig 1 fremstiller et Snit, lagt gennem et Punkt p og vinkelret paa G.

For at kunne tegne begge Projektionerne paa samme Tegnepapir, tænker man sig det=te faldende sammen f. Eks. med V og, efter at Projektionen er foretagen, L drejet om G ind i V, saaledes som Pilen (Fig.1) angiver.

Punktet p's to Billeder ville altsaa vise sig saaledes, som Fig. 2 viser; $p_L\, p_V$ kaldes den projice=

Fig. 1.

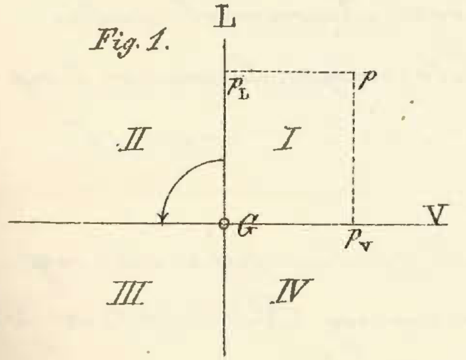
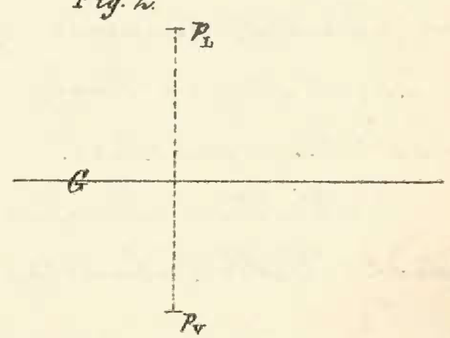


Fig. 2.



rende Linie. Afstanden fra G til p_L angiver altsaa, hvor langt Punktet ligger over eller under V, Afstanden fra G til p_V, hvor langt Punktet ligger foran eller bagved L.

Ved L og V deles Rummet i fire Dele, som benævnes förste, anden, tredie og fjerde Rumvinkel (I, II, III, IV). I er den Rumvinkel, hvori man tænker sig selv staaende.

Skæringen mellem en Linie eller en Plan og Billedplanerne benævnes henholdsvis Liniens eller Planens Spor i Billedplanerne.

Foróvrigt henvises til Deskriptiv-Geometrien.

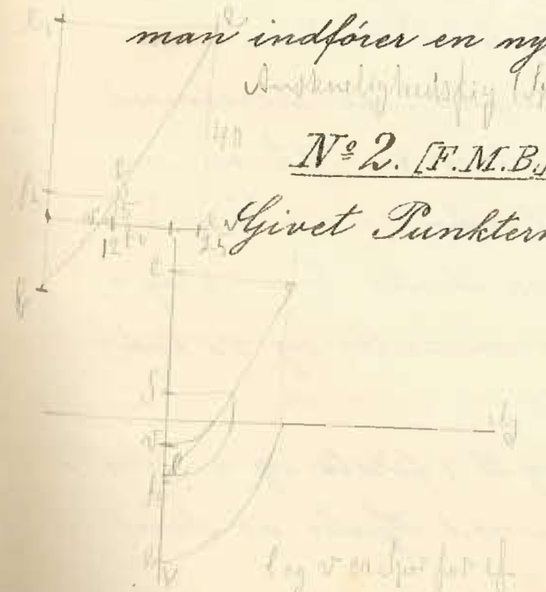
Nº 1. [F.M.B.] (Dobbelt retvinklet Afbildning).

Tegn Billederne af 16 Punkter, nemlig et i hver af de 8 Rumvinkler, hvori Rummet deles ved Billedplanerne og Halveringsplanerne I og II, samt et paa Overgangen mellem hver af disse Rumvinkler.

Bestem Punkternes Billeder paa en ny lodret Billedplan og paa en ny Billedplan ⊥ L.

Til denne Opgave bemærkes, at Halveringsplanerne I og II ere de Planer, der gaa gennem G og halvere de fire Rumvinkler; Halveringsplan II, der halverer anden og fjerde Rumvinkel, kaldes ogsaa Hovedplanen, en Linies eller en Plans Spor deri Hovedsporet.

Man kan naturligvis indföre f. Eks. en ny lodret Billedplan og af et Punkt p's gamle Billeder bestemme det ny lodrette Billede (p'_L). Det vandrette Billede forandres selvfölgelig ikke, den projicerende Linie $p_V p'_L$ er vinkelret paa den ny Grundlinie G', og Afstanden fra G' til p'_L angiver atter Punktets Afstand over eller under V. Paa lignende Maade bestemmes det ny Billede, hvis man indförer en ny Billedplan vinkelret paa L.



Nº 2. [F.M.B.] Dobb. retv. Afb.

Givet Punkterne:	x	y	z
a	70	37	−12
b	100	14	35
c	57	13	13
d	107	40	25
e	125	25	40
f	125	12	5

I de udförte Tegninger er ikke altid anvendt samme Koordinater som her anført, da Koord. [illegible]

Tegn Linierne ab, cd og ef, bestem deres Spor, Hovedspor samt Sporene i Halveringsplan I.

Linierne afbildes paa en ny lodret Billedplan $\neq ab$ i en Afstand fra den $= 30$.

De drejes om samme lodrette Linie gennem a hen i Frontplaner.

De nedlægges i samme vandrette Plan gennem c. Ved de forskellige Operationer følge alle Sporene med. Maalene ere Millimeter

---

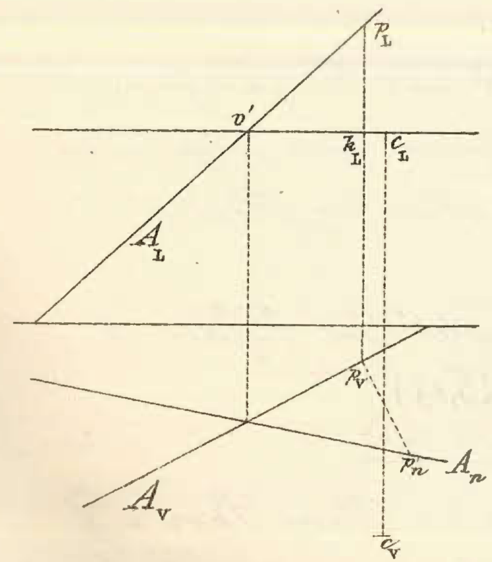
x'erne betegne her Punkterne a, b, c's ..... Afstande fra en vilkaarlig valgt Plan, vinkelret paa G, y'erne Afstandene foran (positive) eller bagved (negative) L, z'erne Punkternes Afstande over (positive) eller under (negative) V, altsaa med andre Ord x y og z er Koordinater i et treretvinklet Koordinatsystem, hvori G er x-Aksen, medens y- og z-Aksen ligge henholdsvis i V og L.

En Linies lodrette og vandrette Spor, l og v, bestemmes let derved, at l's vandrette og v's lodrette Billede falder paa G.

En Linies Spor i I og II (første og anden Halveringsplan) finder man ved Hjælp af den

fra Opg. 1 kendte Afhængighed mellem Billederne af et Punkt, der ligger i en af disse Planer.

Til Punkt 3 bemærkes, at naar en Genstand drejes om en lodret Linie, beskriver hvert af dens Punkter en vandret Cirkel, som altsaa i lodret Billede viser sig som en vandret Linie, i vandret Billede som en Cirkel om Aksens vandrette Billede som Centrum. Herved løses denne Del af Opgaven let, idet man naturligvis drejer en ret Linie ved at dreje to af dens Punkter lige store Vinkler.



Til Punkt 4 bemærkes, at Linierne skulle nedlægges om deres Projektioner paa den omtalte vandrette Plan.

Skal f. Eks Linien A nedlægges paa den omtalte Maade, bliver dens Spor v' i den givne vandrette Plan liggende, medens Punktet p kommer til p_n, idet $p_n p_v = p_L k_L = p$'s Afstand fra den givne Plan.

(Opgaven maa helst deles, saaledes at de to förste Afdelinger besvares i en Tegning, de to sidste i en anden).

No 3. [F.M.B] Dobb. retv. Afb.

Givet Punkterne:		x	y	z	
	a	73	−8	30	mm
	b	163	12	69	
	c	133	37	10	

Bestem Spor i V og L samt i Halveringsplanerne I og II for Trekant a b c's tre Sider og dens Plan.

Nedlæg Trekanten i V ved Drejning om vandret Spor, og lad alle fundne Spor fölge med.

Bestem Billederne af de tre Höjder i Trekanten.

Hvad bliver Koordinaterne for Höjdernes Skæringspunkt? (128,7, 24,8, 25,03)

Skal man bestemme en Plans Spor i f. Eks. förste Halveringsplan, kender man straks et Punkt deraf, nemlig det, hvori Planen skærer G; et andet Punkt bestemmes derved, at man vælger sig en vilkaarlig (f. Eks. vandret) Linie i Planen

og bestemmer dennes Skæring med förste Halveringsplan; hvorledes dette sker, kendes fra forrige Opgave.

Drejes Planen om sit vandrette Spor, indtil den falder sammen med V, beskriver hvert Punkt en Cirkel med Centrum paa Planens vandrette Spor. Disse Cirkler vise sig i vandret Billede som rette Linier ⊥ Planens Spor; Radius i Cirklen findes som Hypothenuse i en retvinklet Trekant, hvis ene Kathede er det betragtede Punkts Afstand fra V, den anden Afstanden fra Punktets vandrette Billede til Planens vandrette Spor.

Trekantens Höjder tegnes naturligvis förste i Nedlægningen og föres derpaa tilbage.

No 4. [F.M.B] Dobb. retv. Afb.

Givet Sporene for en Plan:

L_P . ($z = x \div 20$ mm; $y = 0$)

V_P . ($x = 1{,}5y + 20$ $z = 0$)

samt lodret Billede af en Ellipse, som ligger i Planen.

Dette lodrette Billede er en Cirkel med Centrum i ($\overset{x}{105}$, $\overset{y}{0}$, $\overset{z}{25}$) og Radius = 20.

Bestem ved Hjælp af Hovedsporet Ellipsens vandrette Billede, og ved Nedlægning om V_P den sande Figur (Mindst 12 Punkter, deriblandt de særegne).

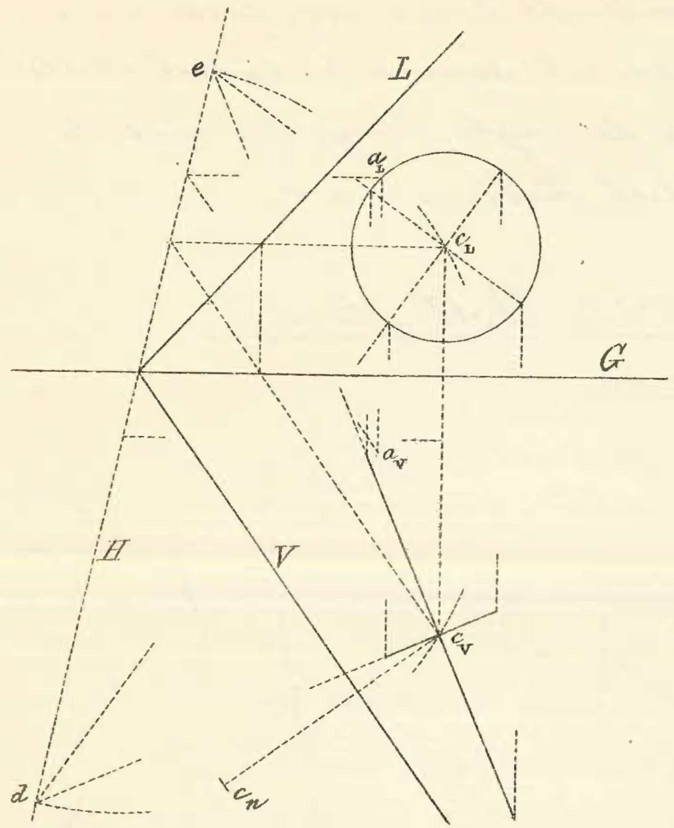
Bestem Akserne i vandret Billede og i Nedlægning.

Tegn de 4 Tangenter til Ellipsen, som danne 45° med Hovedsporet.

Först bestemmes, f. Eks. som i Fig., Hovedsporet ved en vandret Linie gennem Ellipsens Centrum, tillige faas herved c_V. Dernæst er vist, hvorledes man ved Hjælp af Hovedsporet kan konstruere a_V, idet man vælger a_L vilkaarlig paa Cirklen.

For at bestemme Akserne i selve Ellipsen, der i Billederne vise sig som konjugerede Diametre, kan man her benytte sig af den Omstændighed, at Ellipsen i lodret Billede projiceres som en Cirkel; for at dette skal kunne finde Sted, maa nemlig Ellipsens store Akse være vinkelret paa dens Plans Spor i L og altsaa i lodret Billede vise sig vinkelret paa L; a er altsaa det ene Endepunkt af Ellipsens store Akse (hvis $c_L a_L$ er $\perp$ L); efter at Aksernes Billeder ere bestemte, udföres

deres Nedlægning let. Ogsaa i Nedlægningen



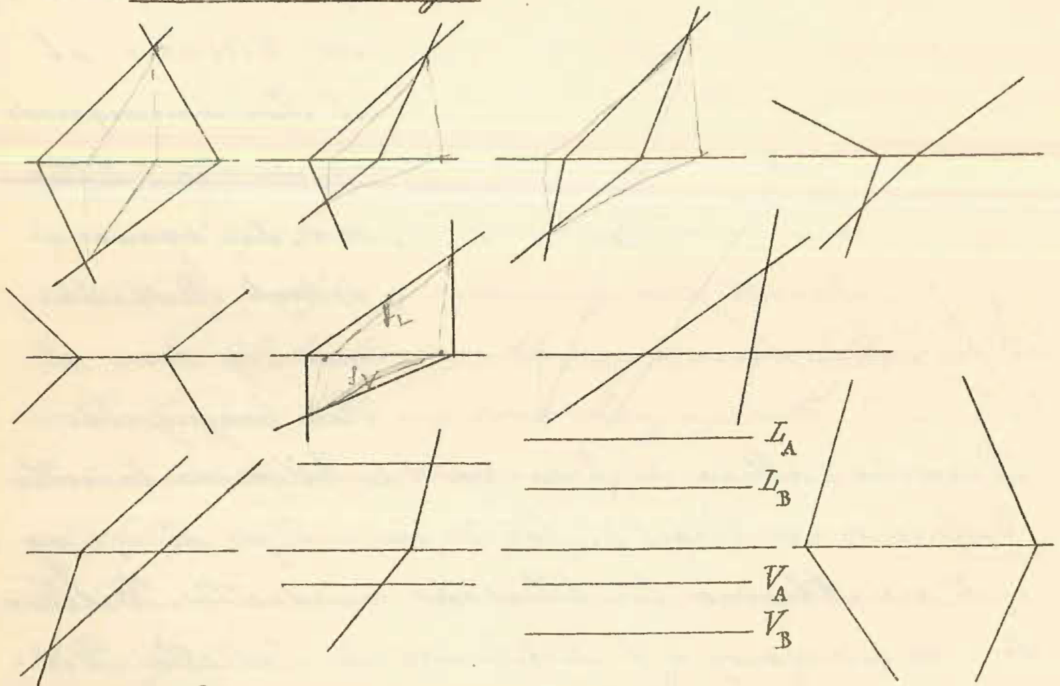
maa Akserne vise sig $\perp$ og ≠ L's Nedlægning.

Ellipsens vandrette Billede er atter en Ellipse, og dennes Akser ere Billeder af et Par konjugerede Diametre i Ellipsen, der ogsaa i lodret Billede vise sig som et Par konjugerede Diametre, altsaa $\perp$ hinanden (da Ellipsens lodrette Billede er en Cirkel). Lad os nu antage at c_V e og c_V d ere Akserne for Ellipsens vandrette Billede, da ere c_L e og c_L d de tilsvarende lodrette Billeder og skulle altsaa staa $\perp$ hinanden; det gælder altsaa kun om at konstruere d og e saaledes, at d e fra c_L og c_V ses under rette Vinkler.

For at konstruere de forlangte Tangenter tegner man f. Eks. gennem c_h to Linier, der danne 45° med det nedlagte Hovedspor, føre disse tilbage først til vandret, dernæst til lodret Billede, tegner derpaa de søgte Tangenter med Røringspunkter i lodret Billede o. s. v.

No 5. [F.M.B.] Dobb. retv. Afb.

Planers Skæring.



Skal man søge Skæringslinien mellem to Planer, overskærer man dem altid med en vilkaarlig Plan; herved faas to Skæringslinier, hvis Skæringspunkt er et Punkt af den søgte Linie; fo=

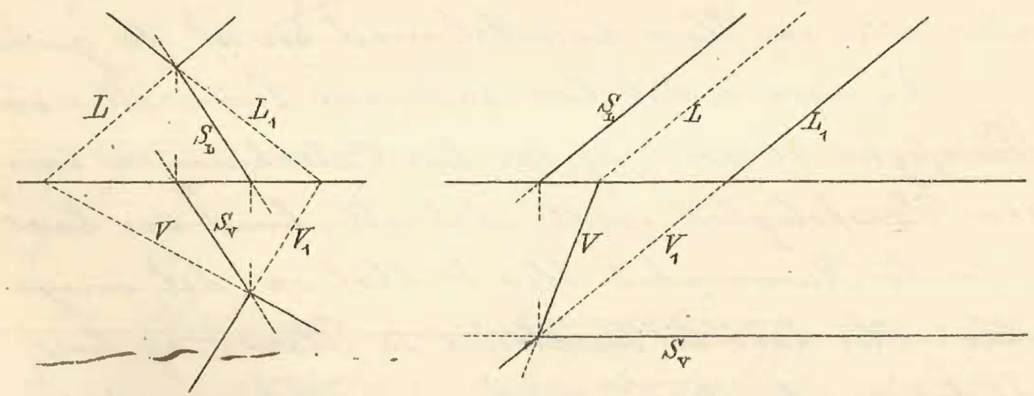
retages denne Operation to Gange, er altsaa den søgte Skæringslinie bekendt. I Almindelighed ere Planerne givne ved deres Spor, og det ligger da lige for at benytte den lodrette og den vandrette Billedplan som de omtalte Snitplaner; de Punkter, man saaledes faar, ere Skæringsliniens Spor. Det kan imidlertid hænde, at et af disse Spor eller begge falder udenfor Papiret.

Skærer f. Eks. de to lodrette Planers Spor ikke hinanden indenfor Papiret, kan den lodrette Billedplan ikke benyttes som Hjælpeplan, og man maa da i Stedet for denne benytte en vilkaarlig valgt Hjælpeplan (alm. en vandret Plan eller en Plan parallel med lodret Billedplan ɔ: en Frontplan eller en Plan parallel med en af de givne).

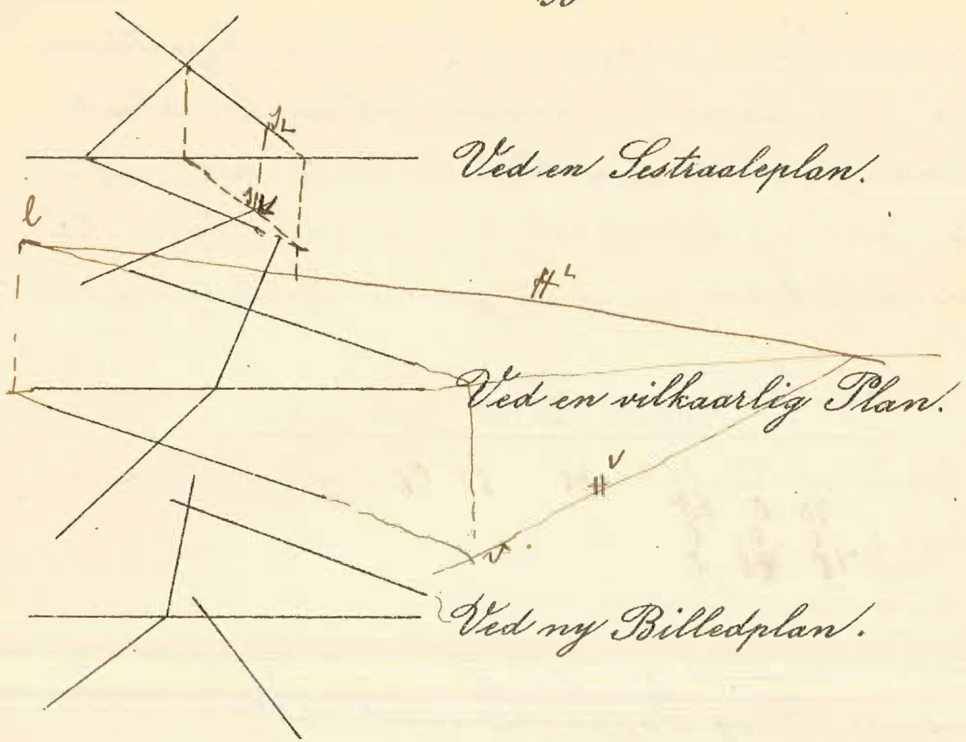
Vi have hidtil kun haft med Linier eller en Planfigur at gøre, og her har Optrækningen ingen Vanskelighed voldt, idet alt, hvad der laa i første Rumvinkel, blev trukket op, det øvrige ikke. Her have vi imidlertid to Planer, og hvis de begge betragtes som uigennemsigtige, vil den ene muligvis kunne skjule Dele af den anden, og Liniers eller Kurvers Billede trækkes kun op, forsaavidt Genstanden selv (Linien eller Kurven) er synlig.

Har man saaledes en Plan med et vilkaarligt vandret Spor, medens det lodrette helder tilhöjre, og tænkes der paa vandret Billede, da vil denne Plan skjule alt, hvad der ligger mellem den og V samt tilhöjre for dens vandrette Spor; helder det lodrette Spor tilvenstre, bliver det, som ligger tilvenstre for det vandrette Spor (og mellem Planen og V) skjult.

Paa lignende Maade afgöres, hvad en Plan skjuler i lodret Billede. — Anvendes denne Regel paa Opgaven, bliver Optrækningen f. Eks. i fölgende Tilfælde som vist:



No 6. [F.M.B.] Dobb. retv. Afb.
Skæring mellem Linie og Plan.



Skal man söge Skæring mellem en Linie og en Plan, kan man gaa frem paa to Maader:

1). Man lægger en eller anden Plan gennem Linien; denne Plan skærer da den givne Plan i en Linie, som indeholder det sögte Punkt; man kan her enten vælge en ganske vilkaarlig Plan, hvis Spor maa indeholde Liniens Spor og skære hinanden paa Aksen, eller en af Liniens Sestraaleplaner.

2). Man kan projicere baade den givne Linie og Plan ind paa en ny Billedplan, vinkelret paa den givne Plan; Liniens og Planens Projektioner her ere rette Linier; man faar altsaa her straks Skæringspunktets Projektion og projicerer nu tilbage, (den ny Billedplan vælges naturligvis tillige vinkelret paa en af de gamle Billedplaner).

No 7. [F.M.B.] Dobb. retv. Afb.

Givet et Punkt a $\left(\overset{x}{40}\ \ \overset{y}{85}\ \ \overset{z}{70}\right)$ og en Plan P gennem $\left(\begin{array}{ccc} 90 & 0 & 65 \\ 0 & 0 & 0 \\ 70 & 60 & 0 \end{array}\right)$

Find a's Afstand fra P.

Tegn en Omdrejningskegle med Toppunkt i a, Grundflade i P og Toppunktsvinkel = 45°.

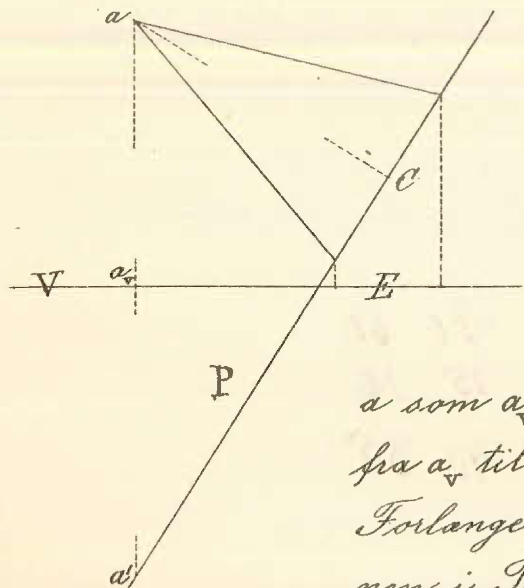
Konturfrembringerne konstrueres.

Man tegner straks Billederne af den vinkelrette fra a paa Planen (ved Hjælp af den bekendte Sætning: naar en Linie staar vinkelret paa en Plan, da staar Liniens retvinklede Projektion vinkelret paa Planens Spor i den tilsvarende Billedplan) og kan nu finde Skæringspunktet mellem denne og den vinkelrette, hvilket man af Hensyn til den følgende Del af Opgaven bedst udfører ved at indføre en ny lodret Billedplan ⊥ P's vand

rette Spor.

Paa denne Plan kan man straks tegne Keglens Projektion og kender altsaa Radius i dens Grundflade; P nedlægges om sit vandrette Spor, Cirklen tegnes i Nedlagningen og for at tegne dens Billeder føres et passende Antal Punkter (c. 12) tilbage (disse Drejninger udføres ved Hjælp af den ny Billedplan).

For at konstruere Konturfrembringerne f. Eks. i vandret Billede kunne vi gaa saaledes frem:



Lad Fig. forestille Projektionen paa den ny lodrette Billedplan. Grundfladen (Cirklen) C projiceres paa V som Ellipsen E, Toppunktet a som a_v; det er nu Tangenterne fra a_v til E, vi skulle konstruere. Forlænge vi a a_v, træffer den Planen i Punktet a' (som altsaa ogsaa er vandret projiceret i a_v); Tangenterne fra a' til Cirklen projiceres altsaa ogsaa som de søgte Tangenter, og ved Hjælp heraf kunne vi konstruere disne, idet man nedlægger a' med Planen, tegner Tangenterne fra a'_n til c_n og förer Röringspunkterne tilbage.

Paa lignende Maade konstrueres Konturfrembringerne i lodret Billede.

En anden Maade at finde Konturfrembringerne paa er ved Hjælp af en Kugle, som rörer Keglen langs Grundfladens Omkreds. Denne Kugle konstrueres let i det ny lodrette Billede og föres derfra tilbage i de andre Billeder. Konturfrembringerne ere da Tangenter til Kuglens Omrids.

No. 8. [F.M.B.] Dobb. retv. Afb.

Givet:

	x	y	z
a:	30	50	30
b:	25	15	10
c:	70	40	35

[illegible]

Find a's Afstand fra b c.

Opgaven löses som bekendt ved igennem a at lægge en Plan vinkelret paa b c; af denne Plan kende vi altsaa et Punkt a samt Ret-

ningerne af dens Spor (ifölge Sætningen i forrige Opgave). Vi kunne altsaa gennem a lægge en, f. Eks. vandret, Linie i Planen; söges dennes lodrette Spor, faas herved et Punkt af Planens lodrette Spor o. s. v.

Antallet af Hjælpelinier reduceres noget, hvis man i Stedet for at söge Planens Spor nöjes med at lægge gennem a en vandret Linie og en Frontlinie i Planen; Planens Skæring med b c bestemmes da let ved Hjælp af en af b c's Sestraaleplaner.

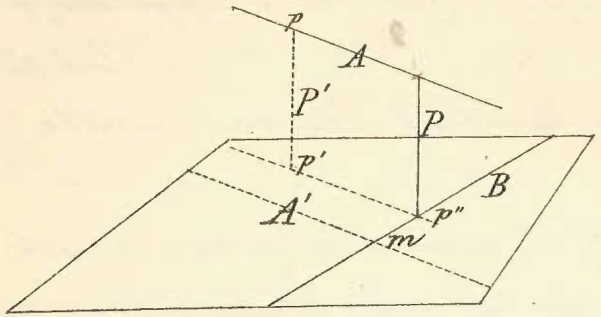
No. 9. [F.M.B.] Dobb. retv. Afb.

Givet:

	x	y	z
a:	46	17	12
b:	89	4	36
c:	78	50	52
d:	97	18	7

Find den korteste Afstand mellem a b og c d.

Lad os kalde de givne Linier A og B: man löser da bedst Opgaven saaledes: man vælger et Punkt m paa B, lægger derigennem en Linie $A' \neq A$, Planen $A'-B$ er da vinkelret paa den søgte Afstand P; dernast



valges et vilkaarligt Punkt p paa A; fra p faldes en Linie vinkelret paa Planen $A'-B$ (Satningen i 7), dens Skaringspunkt p' med Planen konstrueres. $p\,p'$ er da ≠ den søgte Afstand P; for at finde selve denne behöver man kun at trakke Linien $p'p''$ ≠ A. P's sande Længde bestemmes som sædvanlig.

Man kan ogsaa gaa saaledes frem: Efterat P' er tegnet kender man to Linier i Planen $A-P$ og finder nu p'' som Skaringspunkt mellem denne Plan og B (uden först at finde Planens Spor). Derefter tegnes P ≠ P', o. s. v.

Nº 10. [F.M.B.] Dobb. retv. Afb.

Givet Linien L og Planen P

L gennem: $\begin{cases} 23,\ 50\ \ 50 \\ 50,\ 33,\ 7 \end{cases}$

P gennem: $\begin{cases} 45,\ 0,\ 0 \\ 70,\ 0\ \ 40 \\ 35\ \ 55\ \ 0. \end{cases}$

Find Vinklen mellem L og P.

Man valger et Punkt paa L og drager herigjennem en Linie L' vinkelret paa P. Vinklen mellem L og L' er da Complementvinkel til den søgte Vinkel og findes, idet man nedlægger Planen L L' om sit vandrette Spor.

Nº 11. [F.M.B.] Dobb. retv. Afb.

Givet Planerne P^1 og P^2.

P^1 gennem: (80,0,0 – 58, 0, 42 – 167, 53, 0)

P^2 gennem: (130,0,0 – 58, 0, 42, – 167, 53, 0)

Find Vinklen mellem P^1 og P^2.

Gennem et vilkaarligt Punkt konstrueres to Linier vinkelrette henholdsvis paa P^1 og P^2; Vinklen mellem de to Linier er da lig Vinklen mellem de to Planer og findes i sand Störrelse paa samme Maade som Vinklen mellem L og L' i forrige Opgave.

Nº 12. [F.M.B.] Dobb. retv. Afb.

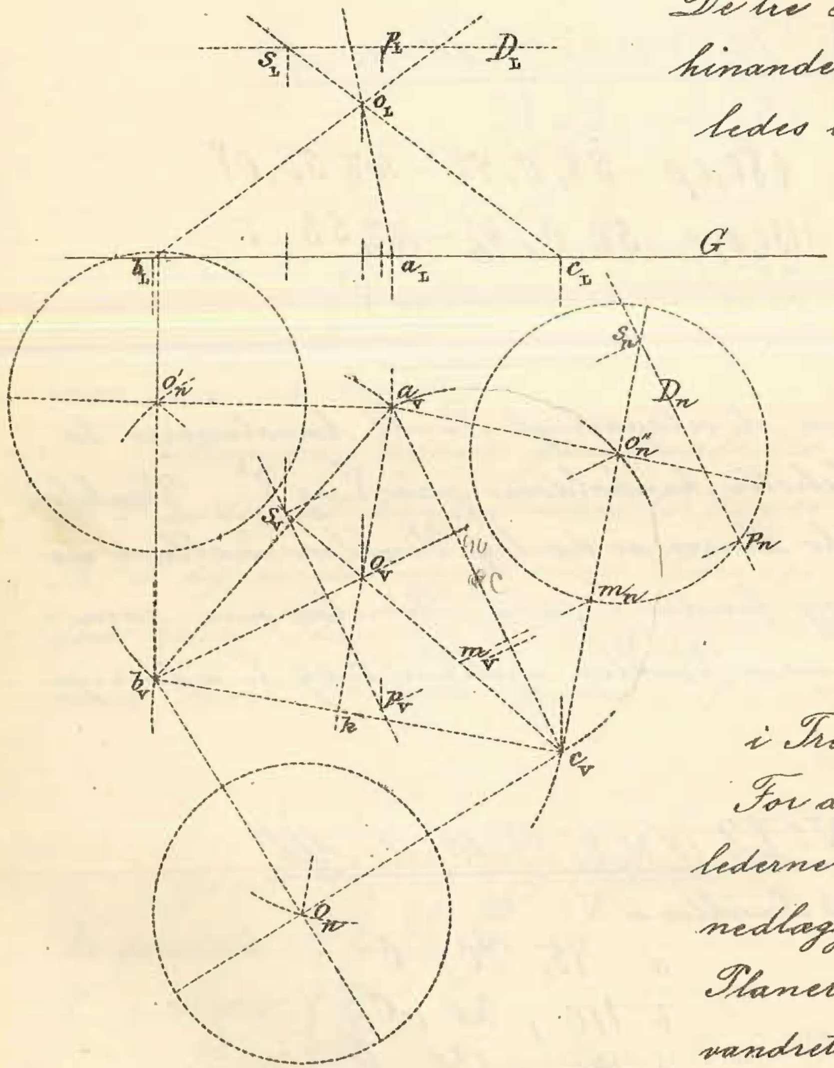
Givet 3 Punkter i V:

a: 45, 70, 0

b: 110, 20, 0

c: 140, 130, 0

Man skal bestemme Billederne af 3 Cirkler med fælles Centrum og samme Radius = 35, hvis Planer staa vinkelret paa hverandre og have Linierne $a b$, $b c$ og $c a$ til vandrette Spor.



De tre Planer skære hinanden i o, saaledes at $o a$ er vinkelret paa Planen $o b c$, o.s.v., altsaa vise $o_v a_v$, $o_v b_v$ og $o_v c_v$ sig (ifølge Sætningen i 7) som Højder i Trekanten $a_v b_v c_v$.

For at tegne Billederne af Cirklerne, nedlægges alle tre Planer om deres vandrette Spor; o_n, o_n'

og o_n'' findes let idet f. Eks. $\angle\, a o b = 90°$.

o_L findes idet o's Højde over den vandrette Billedplan er Kathede i en retvinklet Trekant, hvor $o_v k$ er den anden Kathede, $k o_n$ Hypothenusen. Ved Hjælp af Nedlægningerne finder man de Punkter (f. Eks. m), hvori Cirklerne to og to skære Planernes Skæringslinier. For derpaa at konstruere Cirklernes Billeder, kan man enten benytte Profilplaner ɔ: nye Billedplaner vinkelrette paa de vandrette Spor, eller man kan gaa frem som vist i Fig. for Punktet p's Vedkommende, idet man benytter vandrette Linier (D) i Cirklernes Planer.

Foruden de ovenfor omtalte Punkter maa naturligvis Toppunkterne for Cirklernes Billeder ogsaa konstrueres.

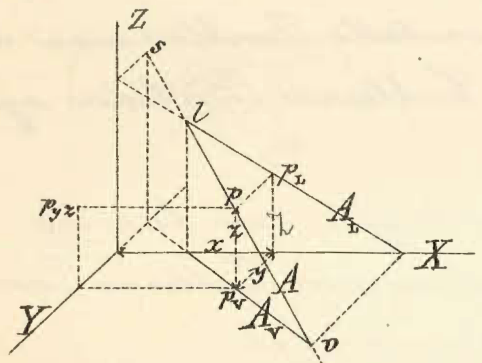
Ved Optrækningen betragter man kun de Dele af Planerne, der ligge indenfor Cirklerne, som virkelig eksisterende (uigennemsigtige).

[M.B.] b, Skraa Afbildning.

Tænker man sig en Genstand henført til et treretvinklet Koordinatsystem (saaledes at altsaa ethvert Punkt er bestemt ved sine 3 Koordinater), og projicere vi det hele (Koordinatsystem og Genstand) i skraa Retning ind paa X–Z Planen eller en dermed parallel Plan, da faa vi et saakaldet „skraat Billede".

Da Øjet tænkes uendeligt fjærnt, ville parallele Linier atter afbildes som parallele; alt hvad der ligger i X–Z Planen eller en dermed parallel Plan viser sig i sand Störrelse.

Sestraalernes Retning vælges almindelig saaledes: 1, at Y-Aksens skraa Billede halverer Vinklen mellem X- og Z-Aksens og 2, at et eller andet Stykke, der afsættes udad Y-Aksen i Billedet viser sig halvt saa stort.

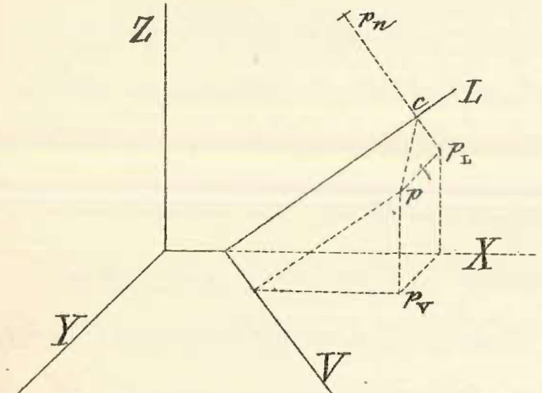


Vi bruge her Betegnelserne p, p_v, p_L p_{yz}, men mene hermed egentlig det skraa Billede af p, det skraa Billede af p's vandrette Projektion o.s.v.

Skal man afsætte et Punkt p, hvis Koordinater ere givne, afsættes X- og Z-Koordinaten saaledes som vist, medens det Stykke, der er betegnet med y, kun er lig det halve af den givne Y-Koordinat. Har man givet en Linie,

bestemmes dens Spor v l og s f. Eks. saaledes som vist i Figuren.

Skal man ved Nedlægning bestemme sand Störrelse af en plan Figur, maa man naturligvis dreje Planen om en Frontlinie ind i en Frontplan, f. Eks. om dens lodrette Spor ind i (X–Z–) Planen; herved vil et Punkt beskrive en Cirkel, hvis Plan staar vinkelret paa L, dens Centrum c ligger



paa L. c bestemmes som vist, idet pp_L $\perp$ XZ Planen, altsaa paa L, og desuden $p_L c \perp L$, altsaa Planen $pp_L c \perp L$.

cp_n er lig sand Störrelse af cp, eller med andre Ord, Hypothenuse i en retvinklet Trekant, hvor cp_L og $2pp_L$ ere Kathederne.

Angaaende Nedlægning af en Plan parallel med en af Koordinatplanerne henvises til Opgave 19.

No 13. [M.B.] Skraa Afb.

Givet Punkterne: x y z som Nr 3

a:

b:

c:

Bestem Spor i de tre koordinerede Planer for Trekant abc's tre Sider og dens Plan.

Bestem ved Nedlægning Trekantens sande Figur.

Bestem Billederne af de tre Höjder i Trekanten.

(№ 3)

Udföres let ved Hjælp af ovenstaaende.

[M.B.] c, <u>Retvinklet aksonometrisk Afbildning.</u>

Tænke vi os en Genstand (vi kunne foreløbig betragte et enkelt Punkt deraf) henfört til et treretvinklet Koordinatsystem, og projicere vi derpaa Genstand og Koordinatsystem <u>retvinklet</u> ind paa en vilkaarlig Plan, „<u>den aksonometriske Billedplan</u>" faa vi et „<u>retvinklet aksonometrisk Billede</u>" af Genstanden.

Fig. 1. (Anskuelighedsfigur)

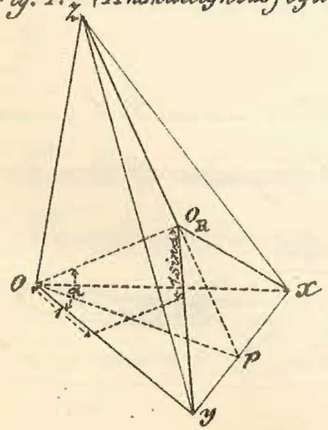
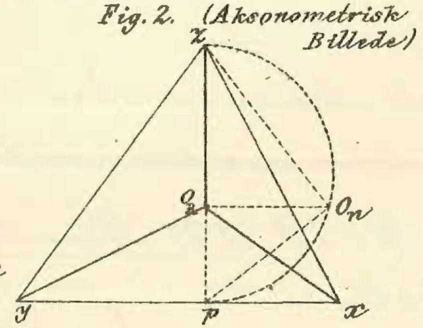
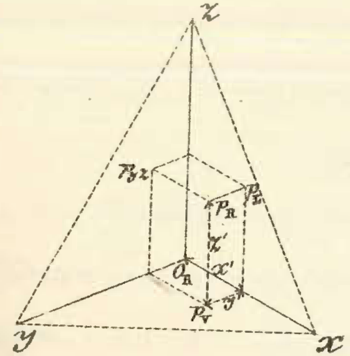


Fig. 2. (Aksonometrisk Billede)



Tænke vi os at x, y og z ere de Punkter, hvori Koordinatakserne skære den aksonometriske

Billedplan, da vil ifölge Sætningen i № 7 X-Aksens Billede $x\,o_R$ være vinkelret paa $y\,z$, $y\,o_R \perp z\,x$ og endelig $z\,o_R \perp x\,y$. Fordi denne Betingelse er opfyldt, behöver Hjörnet dog ikke at være retvinklet, men hvis vi tillige bestemme Afstanden $o_R\,o$ „<u>Distancen</u>", saaledes at Trekant $z\,o\,p$ (hvis ene Side $z\,p$ ligger i Billedplanen) er retvinklet, da vil man let indse, at Hjörnet maa være retvinklet. Distancen er altsaa lig $o_R\,o_n$, idet Trekant $z\,o\,p$ nedlægges om $z\,p$.

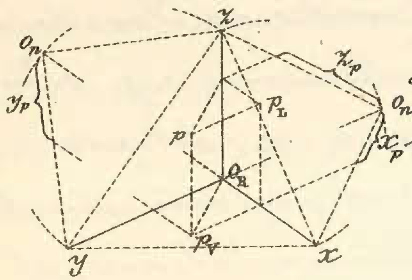


<u>Da Öjet er uendelig fjernt</u>, ville <u>parallele Linier</u> atter i Billedet <u>vise sig som parallele</u>; et Punkt p med sine Koordinater vil altsaa vise sig som i Fig. (p_R, p_V, p_L, p_{yz} betegne her de Aksonometriske Billeder af p og dets retvinklede Projektioner paa de tre Koordinatplaner, x', y' og z' Billederne af Koordinaterne x, y og z til p).

Skal imidlertid denne Afbildningsmaade have noget Værd, maa man, naar et Punkts Billeder ere givne, kunne maale dets Koordinater; eller omvendt, naar et Punkts Koordinater ere givne, kunne afsætte Punktet.

Man indser let (se Fig. 1), at en Længdeenhed, afsat ud ad en af Akserne, i Billederne viser sig som 1·sin α (α lig Vinklen mellem Sestraalen og vedkommende Akse); disse Vinkler kunne let findes og benyttes til Afsætning af Koordinater (se herom i Deskriptiv-Geometrien).

Nok saa let er det imidlertid at benytte sig af et Par Nedlagninger: Trekanterne xoy, yoz og zox ere retvinklede og have deres ene Side liggende i Billedplanen; da det hele er en retvinklet Afbildning, kunne de let drejes ind i Billedplanen, saaledes som vist i Fig.



Skal man nu afsætte et Punkt p med givne Koordinater (x_p, y_p, z_p) kunne disse afsættes paa de nedlagte Akser og føres tilbage (som vist).

Bestemmelsen af en Linies Spor i Koordinatplanerne sker paa lignende Maade som i „skraa Afbildning".

Vi ville endnu vise, hvorledes man, naar et Punkt er givet, bestemmer dettes Afstand

fra den aksonometriske Billedplan.

Fig. 1. (Anskuelighedsfigur).

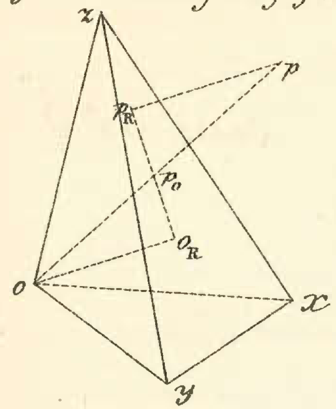
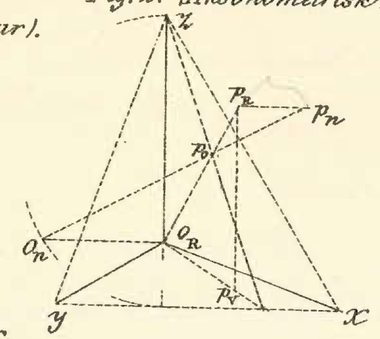


Fig. 2. (Aksonometrisk Billede).



Lad det givne Punkt være p, dets aksonometriske Billede p_R, det er da pp_R, det galder om at bestemme.

Af Fig. 1 ses nu, idet Linien po har Sporet p_0 i den aksonometriske Billedplan, at hvis man kendte de tre Punkter p_R, p_0 og o_R, behøvede man kun at afsætte $o_R o$ (Distancen), gennem p_R trække en Linie parallel med $o_R o$, Linien $o p_0$ gav da Punktet p (det ses let ved Hjælp af de ligedannede Trekanter, at det er ligegyldigt, i hvilken Retning Distancen afsættes).

Det er nu dette, der i aksonometrisk Billede er udført i Fig. 2; Punktet tænkes givet ved p_R og p_V, Linien $p_R o_R$ trækkes, Punktet p_0 er derpaa fundet ved gennem po at lægge en lodret Hjælpeplan; Resten vil let forstaas af Fig. ($p_R p_n$ er lig den søgte Afstand).

№ 14 [M.B.] Aksonometrisk Afbildning.

$\angle(X-Z) = 100°$ $\angle X-Y = 130°$

Givet Punkterne:

	x	y	z
a:			
b:		som Nr 3	
c:			

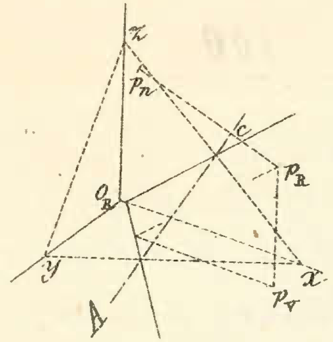
Bestem Spor i de tre koordinerede Planer for Trekant abc's tre Sider og dens Plan.

Bestem ved Nedlægning Trekantens sande Figur.

Bestem Billederne af de tre Höjder i Trekanten. Nr 3

Ved Hjælp af det foregaaende löses denne Opgave let; her skal kun tilföjes et Par Ord angaaende Nedlægningen. Naar en Plan skal nedlægges i en Frontplan f. Eks. i selve den aksonometriske Billedplan, maa dette naturligvis her ske om dens Spor i samme. Et i Planen liggende Punkt beskriver da en Cirkel, hvis Plan staar vinkelret paa Planens Spor (A) i aksonometrisk Billedplan, og som i aksonometrisk Billede viser sig som den rette Linie $p_R p_n \perp A$; $c p_n$ er lig Af-

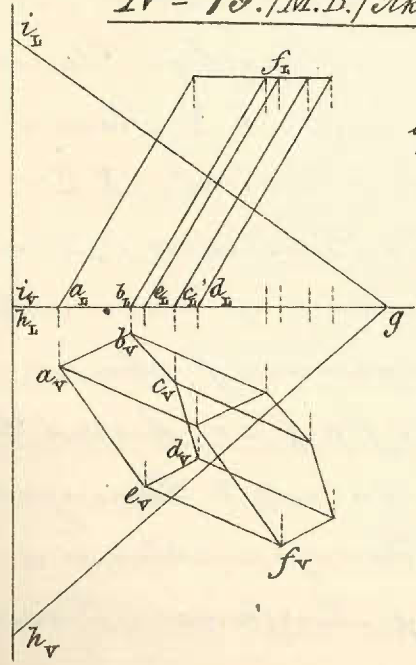
standen fra c til Punktet p, men denne er Hypothenuse i en retvinklet Trekant, hvis Katheder ere $p_R c$ og p's Afstand fra aksonometrisk Billedplan.



Man indser let, at for Punkter i samme Plan bliver $\frac{c p_R}{c p_n}$ konstant, hvilket kan benyttes paa forskellig Maade.

Nedlægningen kan ogsaa udföres ved Hjælp af en ny Billedplan, vinkelret paa Planens aksonometriske Spor.

№ 15. [M.B.] Aksonometrisk Afbildning.



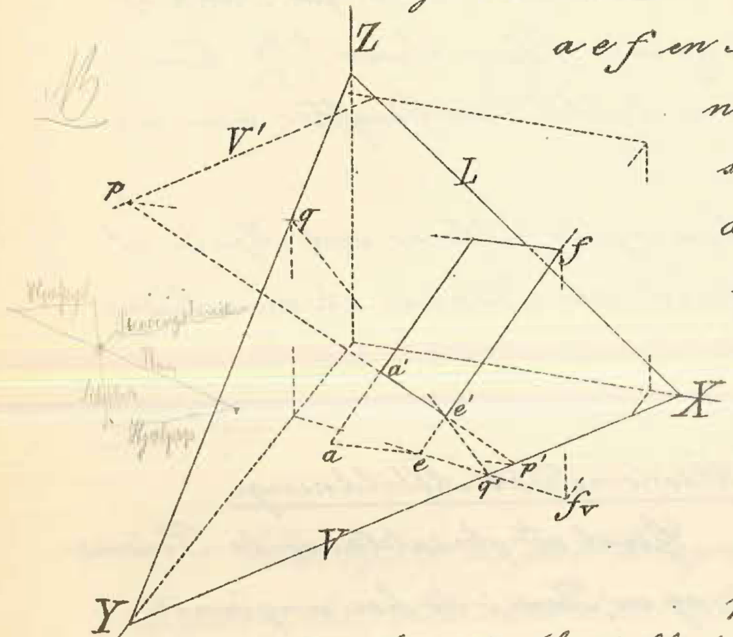
Givet et skraatstaaende Prisme og en Plan i de her angivne Stillinger.

Bestem Skæringslinien.

	x	y	z
a:	13	29	0
b:	41	11	0
c:	57	29	0
d:	68	60	0
e:	44	69	0
f:	91	89	90

	x	y	z
g:	132	0	0
h:	0	143	0
i:	0	0	100

Lad os antage at Planen (VL) er den givne; a e f en Sideflade af det givne Prisme; vi ville søge Skæringslinien a'e' mellem Planen og Sidefladen. Dette kan enten ske ved at overskære begge med et Par vilkaarlige Planer f. Eks. X Y-Planen



og den øverste Endeflade i Prismet, (X Y-Planen skærer Snitplanen i V, Sidefladen i Linien a e, herved bestemmes Punktet p' af Skæringslinien. Den vandrette Plan gennem f skærer Snitplanen i V', Sidefladen i f p ∥ a e, herved bestemmes Punktet p; p p' er den søgte Skæringslinie); eller man kan søge Skæringspunkterne a' og e' mellem Snitplanen og Kanterne i Prismet.

Dette udføres ved at anbringe en Hjælpeplan, f. Eks. en lodret Plan, gennem vedkommende Kant.

Konstruktionen er udført i Fig. for Punktet e's Vedkommende; Hjælpeplanen skærer Snitplanen i q q' gennem e'.

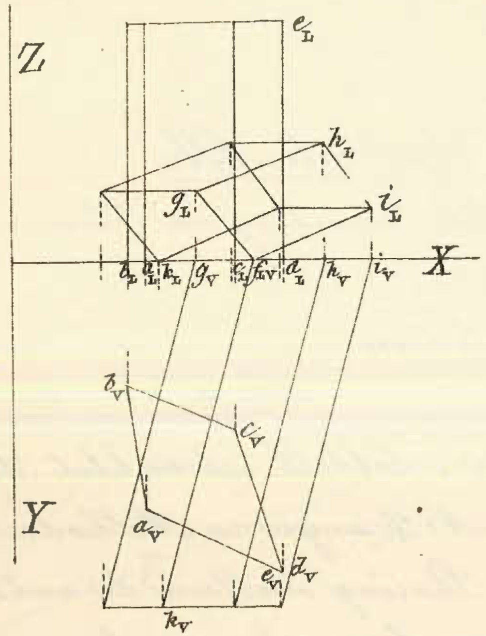
No 15 a. [F] Dobb. retv. Afb.

Givet et skraatstillet Prisme og en Plan i de i No 15 opgivne Stillinger.

Bestem Skæringlinien.

Opgaven kan ogsaa i dobbelt retvinklet Afbildning løses paa de i No 15 angivne Methoder, altsaa enten ved at søge Skæring mellem de enkelte Sideflader og Snitplanen, hvorved man benytter Prismets Endeflader som Hjælpeplaner (se No 15), eller ved at søge Skæring mellem de enkelte Kanter i Prismet og Snitplanen; hvilket lettest og mest praktisk gøres ved at indføre en ny lodret Billedplan vinkelret paa Planens vandrette Spor. Paa denne Billedplan projiceres Snitplanen som en ret Linie og Prismekanterne naturligvis ogsaa som rette Linier; man har altsaa her straks Billedet af Skæringspunkterne og projicerer derpaa tilbage.

Nº 16. [M. B.] Aksonometrisk Afbildning.



Givet et lodret og et vandret Prisme i de her angivne Stillinger.

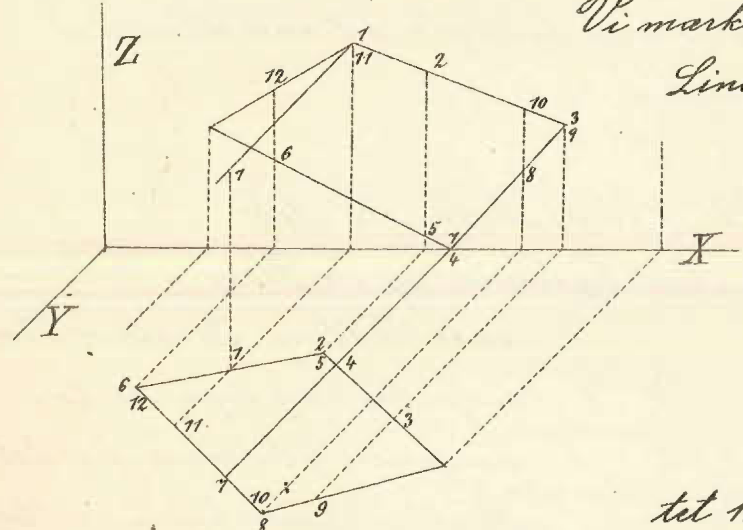
Bestem Skæringslinien.

	x	y	z
a:	53	97	0
b:	47	50	0
c:	86	67	0
d:	105	125	0
e:	105	125	93
f:	88	0	0
g:	71	0	27
h:	121	0	46
i:	141	0	17
k:	56	136	0

Man finder Skæringslinien, idet man søger de Punkter, hvori Kanterne i det ene Prisme skære det andet Prisme og omvendt, og forbinder de fundne Punkter paa rette Maade. For at finde Skæringspunkterne lægger man gennem hver enkelt Kant i det ene Prisme en Hjælpeplan parallel med det andet Prismes Kanter; alle disse Hjælpeplaner bli-

ve altsaa her lodrette Planer, hvis vandrette Spor ere parallele med det vandrette Prismes Kanter.

En vilkaarlig af Hjælpeplanerne vil skære det ene Prisme i en Kant, det andet i en Linie, parallel med dets Kanter, disse to Linier give et Punkt af Skæringskurven.

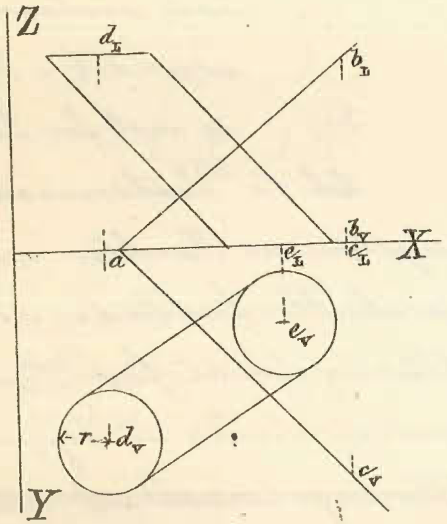


Vi marke nu disse to Linier (deres Spor) og det Punkt, de bestemme, med samme Tal, saaledes som det i Fig. er vist for Punktet 1's Vedkommende.

For nu at faa Skæringsliniens Punkter numererede saaledes, at vi kun skulle forbinde de paa hinanden følgende Numre for at faa Skæringskurven frem, gaa vi saaledes frem: vi begynde med Punkt 1 og følge nu Skæringskurven ud herfra f. Eks. i den ved Pilene angivne Retning; vi komme nu til det næste Punkt (Nº 2), naar vi første Gang træffe en Kant paa et af Prismerne, altsaa som vist; naar vi have passeret Punkt 3, maa Skæringslinien paa det lodrette Prisme gaa tilbage (tilvenstre) paa samme Sideflade, idet der ingen Punkter findes tilhöjre for 3, vi faa altsaa Punkt 4 som vist o. s. v. Da der paa hver Kant ligger to Punkter, faar altsaa hver Kant to Numre, eftersom vi betragte det ene eller det andet Punkt derpaa.

No 17. [F.M.B.] Dobb. retv. Afb.

Givet en skav Cylinder og en Plan i hosstaaende Stilling. Bestem Skæringslinien og tegn de to Tangenter til denne fra det Punkt i Planen, hvis lodrette Billede har Koordinaterne (   )



	x	y	z		x	y	z
a:	42	0	0	d:	36	75	75
b:	125	0	70	e:	105	33	0
c:	125	85	0	r =	20		

Opgaven löses ved at söge Skæring mellem de enkelte Cylinderfrembringere og Planen, hvilket let-

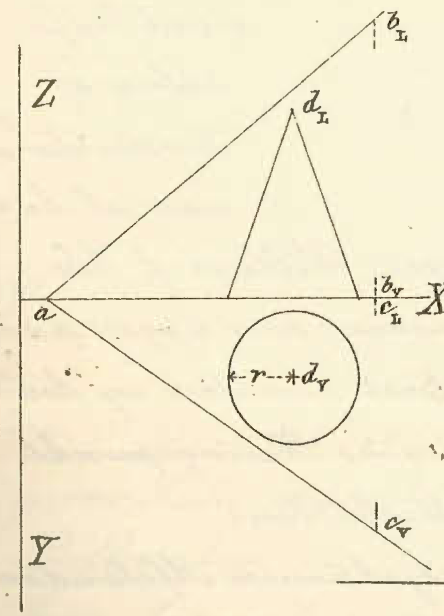
test udföres ved at indföre en ny lodret Billedplan vinkelret paa Planens vandrette Spor.

Blandt de konstruerede Punkter maa naturligvis findes de, som ligge paa Cylinderens lodrette og vandrette Omrids.

Tangenterne til Skæringskurven fra det givne Punkt ligge i Tangentplanerne gennem Punktet til Cylinderen.

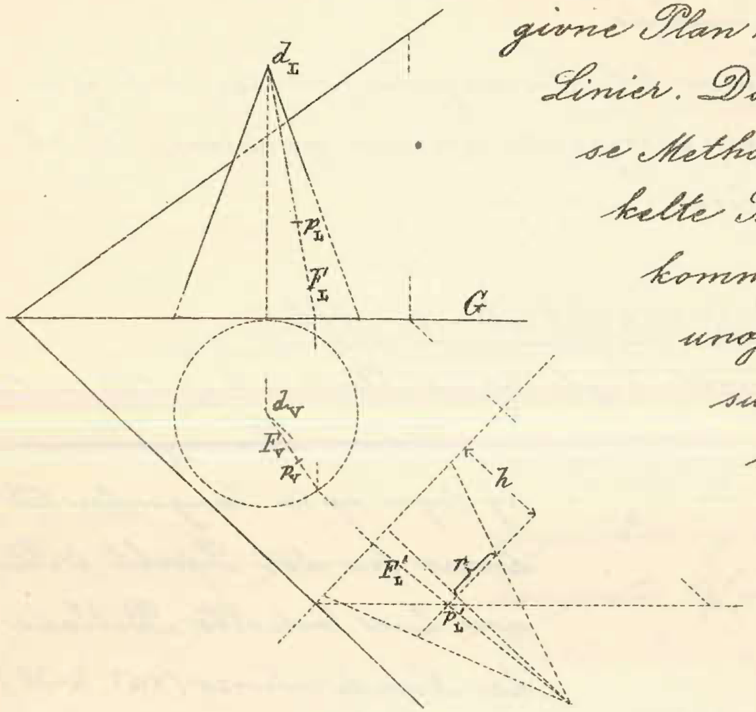
No 18. [F.M.B.] Dobb. retv. Afb.

Givet en ret Kegle og en Plan i hosstaaende Stilling. Bestem Skæringslinien og tegn de to Tangenter til denne fra det Punkt i Planen, hvis lodrette Billede har Koordinaterne (x=67, z=30)



	x	y	z
a:	10	0	0
b:	136	0	96
c:	136	84	0
d:	116	31	71
r =	25		

For at finde Punkter af Skæringskurven kan man enten indföre en ny Billedplan paa samme Maade som i forrige Opgave, eller vi kunne benytte vandrette Planer, der skære Keglen i Cirkler, den

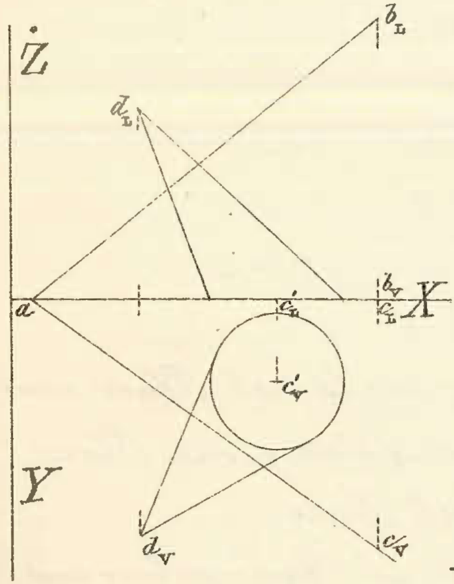


givne Plan i vandrette Linier. Da begge disse Methoder for enkelte Punkters Vedkommende give unöjagtige Resultater, gör man bedst i ved Udförelsen af Konstruktionen at benytte en Kombination af begge. Ville vi f. Eks. finde det Punkt af Skæringskurven, som ligger paa Frembringeren F, projiceres F först paa den ny lodrette Billedplan, og gennem dens Skæringspunkt p med Planen lægges en vandret Plan.

Vi maale nu i Hjælpeprojektionen Afstanden r fra Keglens Akse til p (lig Radius i den vandrette Cirkel og finde nu p_v, idet $p_v d_v = r$. Lodret Billede af p findes, idet vi tegne Frembringerens lodrette Billede og ved Hjælp af Passeren opsöge det Punkt paa F_L, hvis Afstand fra G er lig Afstanden fra p til V (= h).

No 18 a. [F] Dobb. retv. Afb.

Givet en skæv Kegle og en Plan i hosstaaende Stilling.



Bestem Skæringslinien og tegn de to Tangenter til denne fra et Punkt i Planen.

a:

b:

c:

d:

c':

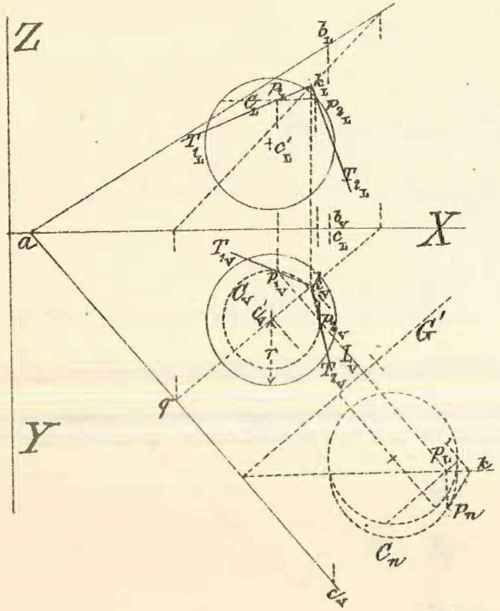
r =

Skæringskurven findes ved den i Opgaven givne Stilling bedst ved at benytte en ny lodret Billedplan vinkelret paa Snitplanens vandrette Spor. Specielt söges naturligvis som sædvanligt

Punkterne paa Keglens Konturfrembringere.

№ 18b. [F] Dobb. retv. Afb.

Givet en Kugle og en Plan i hosstaaende Stilling.



Bestem Skæringslinien og konstruer Tangenten til denne i et af dens Punkter.

a:

b:

c:

c':

r =

Projicerer man ind paa en lodret Plan vinkelret paa det vandrette Spor af den givne Plan, viser denne sig her som en ret Linie.

For nu at finde Punkter af Skæringskurvens Billede, kan man f. Eks. gaa frem paa en af de to følgende Maader: 1, Man kan anvende vandrette Hjælpeplaner, hvoraf en vilkaarlig skærer Kuglen i en Cirkel C, Snitplanen i en vandret

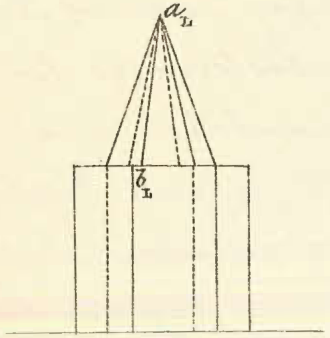
Linie l_1, disse give tilsammen to Punkter p_1 og p_2 af Skæringskurvens. (Lodret Billede af Punkterne bestemmes let, idet Afstanden fra p_1 til G er lig Afstanden fra p_1' til G').

Specielt bestemmes naturligvis Punkterne paa Kuglens Omrids og Toppunkterne for Cirklens Billeder; de i det lodrette Billede bestemmes let ved at indføre en ny Billedplan, vinkelret paa Snitplanens lodrette Spor. Punkterne paa Kuglens lodrette Omrids bestemmes ved at overskære Kugle og Plan med en Frontplan gennem Kuglens Centrum. 2, Lægger man gennem Kuglens Centrum en Plan vinkelret paa den givne Plans vandrette Spor, indses det let, at den vil dele baade Kugle og Snitplanen symmetrisk og derfor skære Snitplanen i en Faldlinie, der er en Diameter i Snittet (som bekendt en Cirkel) og som ogsaa i vandret Billede viser sig som en Diameter. (Akse) $q c_v'$ for Snitkurvens Billede.

Drejes Snitkurven om den omtalte Faldlinie ind i en lodret Plan, viser den sig i Hjælpeprojektionen som en Cirkel C_n. Punkterne p_1 og p_2 ligge i en Afstand fra den ovenfor omtalte Sym=

metriakse lig $p_n p'_L$. Herved findes p_{1_V} og p_{2_V} o.s.v. — Tangenten i f. Eks. p_1 nedlægges som $p_{1_n} k$, dens vandrette Billede er $k_V p_{1_V}$.

NB Nº 19. [M.B.] Skraa Afbildning.



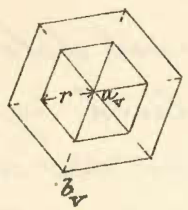
Givet en ret sekssidet Pyramide og et ret sekssidet Prisme i hosstaaende Stilling.

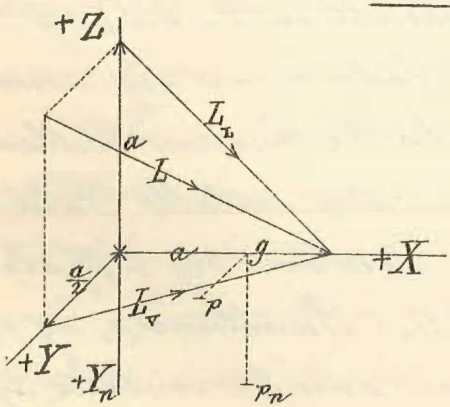
Tegn Skyggen for en Lysretning, hvis Billeder danne 45° med Akserne.

Bestem Belysningsintensiteten for de synlige Flader.

	x	y	z
a :	69	82	129
b :	59	115	65

r = 21





Man tegner først Prismets Grundflade, hvilket udføres derved, at man drejer XY-Planen med de givne Punkter om X Aksen ind i L, tegner Nedlægningen og fører tilbage.

I foranstaaende Fig. er vist, hvorledes man nedlægger et Punkt p af V paa ovennævnte Maade ($p_n g = 2pg$). Desuden er endnu vist Konstruktionen af en Lysstraale og dens Billeder.

Med Hensyn til Belysningsintensiteten bemærkes følgende: Vi tænke os Lysstraalerne udgaaende fra samme uendelig fjærne Punkt; som bekendt vil da Belysningen af en plan Flade, der træffes af Lysstraalerne, være proportional med cos. til Vinklen mellem Lysstraalen og Planens Normal (Indfaldsvinklen).

Sætte vi nu Belysningsintensiteten lig med 100 for en plan Flade, der træffes normalt af Lysstraalerne, kunne vi paa følgende Maade bestemme Belysningsintensiteten i Procent for en plan Flade, der træffes under en vilkaarlig Indfaldsvinkel: Gennem samme Punkt trække vi en Normal til Planen og en Lysstraale; ud ad en af disse Linier afsætter man f. Eks. 100 m/m og projicerer dem ind paa den anden; Antallet af m/m, der indeholdes i Projektionen, angiver da Planens Belysningsintensitet i Procent. Dette gælder for en Plan, der træffes direkte af Lysstraalerne; tænke vi os nu, parallel med denne, en Plan, som ikke træffes af Lysstraalerne (de to Planer kunne f. Eks. være Sidefladerne af en Mur), da vilde denne, hvis der intet Reflexlys eksisterede, være absolut mörk. Saaledes ere Forholdene imidlertid ikke; Lyset kastes tilbage fra mangfoldige Genstande og fra Atmosfæren, og selv om f. Eks. en Væg ikke direkte træffes af Lysstraalerne, viser den sig dog belyst.

Vi sætte nu Belysningsintensiteten for en plan Flade, der ikke træffes direkte af Lysstraalerne, lig det halve af den Intensitet, dens Belysning vilde have, hvis Lysstraalerne faldt ind i modsat Retning, eller med andre Ord, vi bestemme Intensiteten for en saadan Plan paa samme Maade som för, kun at man afsætter 50 m/m ud ad en af Linierne i Stedet for som för 100.

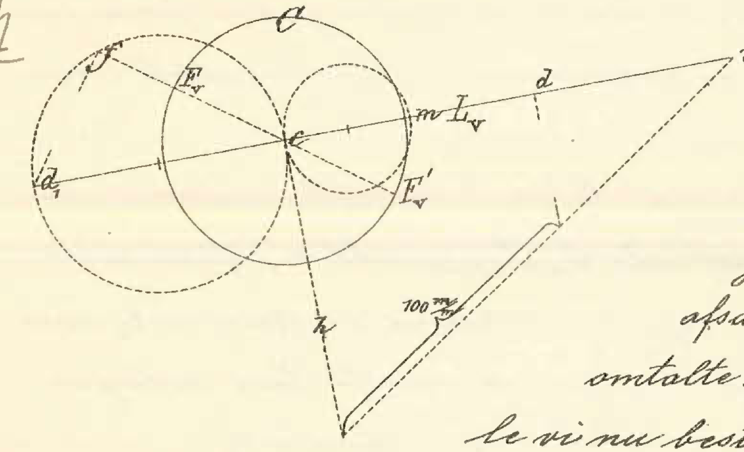
Et Punkt af en eller anden Flade har samme Intensitet som dets Tangentplan; en Cylinder eller Kegle vil saaledes have samme Belysningsintensitet i alle Punkter paa samme Frembringer som Tangentplanen langs denne.

Vi ville nu anvende dette til Bestemmelsen

af Belysningsintensiteten for en vilkaarlig Frembringer af en retstaaende cirkulær Cylinder og Kegle, idet Lysretningen forudsættes bekendt.

Lad C forestille vandret Projektion af Cylinderen, hvis Höjde er h. Gennem det överste Endepunkt af Cylinderens Akse trækkes en Lysstraale, hvis vandrette Spor antages at være v_L; ved Hjælp

NB

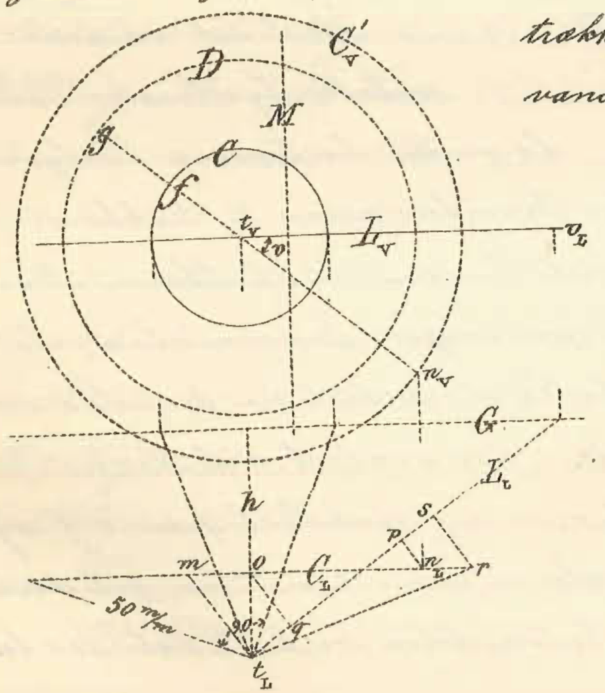


af en Nedlægning findes nu $cd = cd_1$; vandret Projektion af 100 m/m afsat ud ad den omtalte Lysstraale. Ville vi nu bestemme Belysningsintensiteten for Frembringeren F, trække vi (ogsaa gennem det överste Endepunkt af Aksen) Normalen cf til denne Frembringers Tangentplan; ifölge det foregaaende skulle vi nu blot fra d_1 fælde en Vinkelret paa cf, og da cf er vandret, vil denne Vinkelrette i Billedet vise sig vinkelret paa cf og altsaa være $d_1 f$; maale vi nu cf i m/m, vil deres Antal altsaa angive Intensiteten for F. Det ses let, at Punktet f altid vil ligge paa den punkterede Cirkel; vi kunne altsaa straks tegne denne og behöve ikke at falde den vinkelrette $d_1 f$.

Der söges de Frembringere, som have en Belysningsintensitet af 10%, 20%, 30% o.s.v., idet man efterhaanden gör $fc = 10$ m/m, 20 m/m o.s.v.

Havde man betragtet Frembringeren F' paa den mörke Del af Cylinderen, var man gaaet frem paa samme Maade, kun havde man da benyttet $cm = \frac{1}{2} cd$ som för cd_1.

Vi ville dernæst betragte en retstaaende cirkulær Kegle med Grundflade C, Toppunkt t; gennem t trækkes Lysstraalen L, hvis vandrette Spor antages at være v_L.



Vi indföre nu en lodret Billedplan $\parallel L$ og projicerer Keglen og Lysstraalen ind herpaa. Tanke vi os nu gennem Toppunktet for Keglen draget

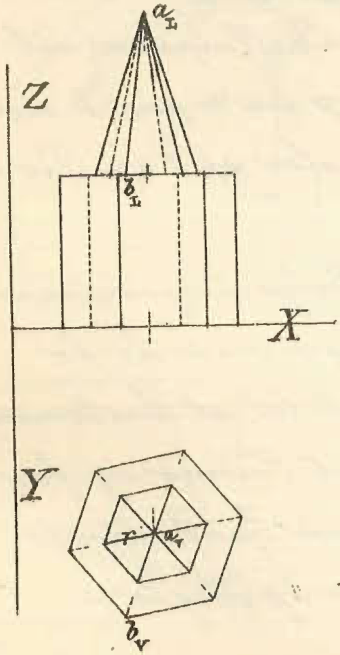
alle Normalerne til denne, ville disse Normaler atter danne en Omdrejningskegle med t som Toppunkt, og hvis yderste Frembringere i lodret Billede vise sig vinkelrette paa Omridsfrembringerne for den givne Kegle. —

Afsætte vi nu ad hver af disse Normaler 50 m/m, faa vi en Kegle med Grundflade C'. Betragte vi nu en Frembringer tf paa den givne Kegle, da har denne en Normal tn, og ifölge det foregaaende skulde vi nu blot projicere tn ind paa L og maale Projektionen i m/m; deres Antal angiver da den halve Intensitet, dersom tf er en lys, den hele Intensitet, dersom tf er en mörk Frembringer. — Da nu L er parallel med den lodrette Billedplan, vil i lodret Billede den vinkelrette np fra n paa L vise sig $\perp L_L$. $t_L p$ er altsaa sand Störrelse af tn's Projektion paa L.

Kan man först bestemme Belysningsintensiteten for en vilkaarlig Frembringer paa de to ovenfor behandlede Flader, er det let at bestemme den for et retstaaende regelmæssigt Prisme og for en regelmæssig Pyramide, idet man henholdsvis benytter deres indskrevne Cylinder og Kegle. —

Keglefrembringernes Belysningsintensitet kan ogsaa bestemmes paa fölgende Maade: Drages $t_L m \perp L_L$, ses Belysningsintensiteten $p t_L$ at være proportional med $m n_L$, der er sammensat af et konstant Stykke $t_L q$ og $q p$, proportional med cos. v. Heraf fölgende Konstruktion: Gennem r drages $r s \perp L_L$; med t_v som Centrum slaas Cirklen D med Radius $q s$; i Afstanden $t_L q$ fra t_v drages Linien $M \perp L_v$. g's Afstand fra M maalt i m/m (paa Lyssiden multipliceret med 2) er da Belysningsintensiteten paa Frembringeren $f t$.

No 20. [M.B.] Aksonometrisk Afbildning.



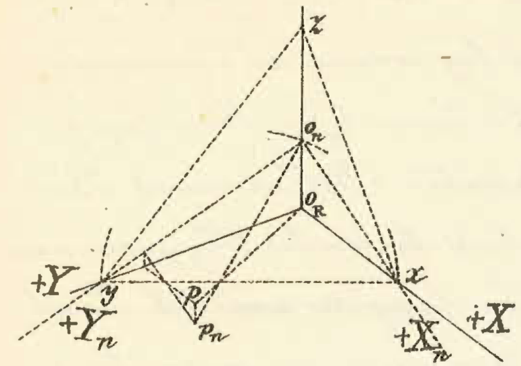
Givet en ret seksidet Pyramide og et ret seksidet Prisme i hosstaaende Stilling.

Tegn Skyggen for en Lysretning, hvis Billeder danne 45° med Akserne.

	x	y	z
a:	69	72	129
b:	59	115	65

r = 21

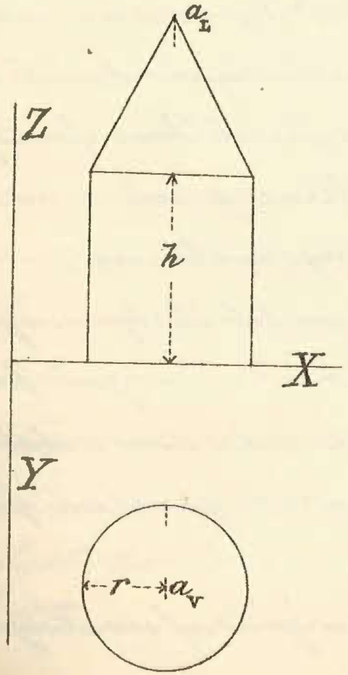
Denne Opgave udföres paa lignende Maade som den foregaaende, kun maa V her drejes om NB



$x y$ ind i den aksonometriske Billedplan; ogsaa her er i Fig. vist Nedlagningen af et Punkt p af V (af Linien $o p$ bliver det Punkt, der ligger paa $x y$, liggende).

No 21. [M.B.] Dobb. retv. Afb.

Givet en retstaaende cirkulær Cylinder og en retstaaende Kegle i hosstaaende Stilling.



Bestem Skyggen for parallele Lysstraaler med sædvanlig Retning.

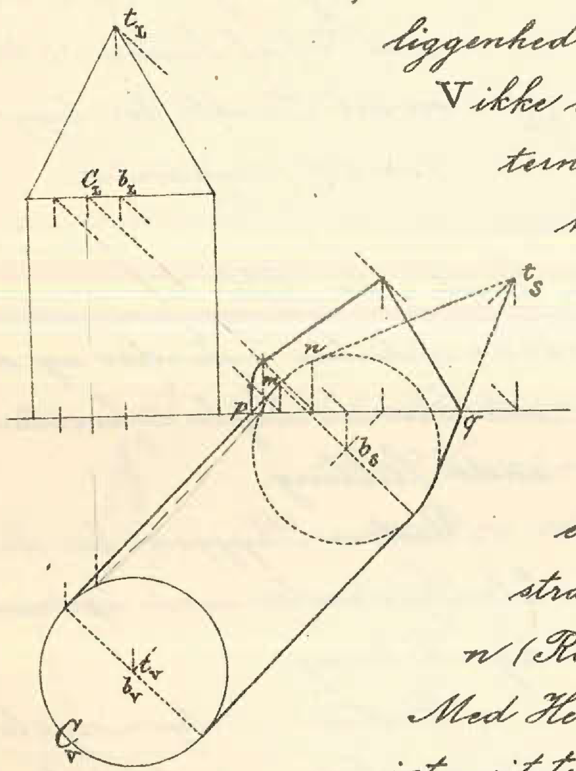
Bestem Belysningslinierne for Intensiteter henholdsvis 10, 20, 30% o. s. v.

	x	y	z
a:	66	77	121

h = 66

r = 27

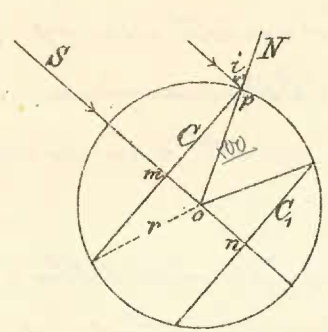
Da Cylinderens överste Endeflade er parallel med V, vil dens Skygge herpaa være en med den selv kongruent Cirkel med Centrum i b_s. Keglens Skygge paa V vil begrænses af Tangenterne fra t_s til Cirklen med Centrum b_s. — Paa Grund af den lodrette Billedplans Beliggenhed fortsættes Skyggen paa V ikke længere end til Punkterne p og q, men böjer her op paa L. Konstruktionen af Skyggen paa L er vist i Fig., særlig maa naturligvis konstrueres lodret Spor for Lysstraalerne gennem m og n (Röringspunkterne).



Med Hensyn til Belysningsintensiteten kan man gaa frem som vist i № 19, eller ogsaa anvende den i det fölgende viste Methode, hvor man gaar ud fra en tangerende Hjælpekugle.

Vi betragte först Belysningen af en Kugle.

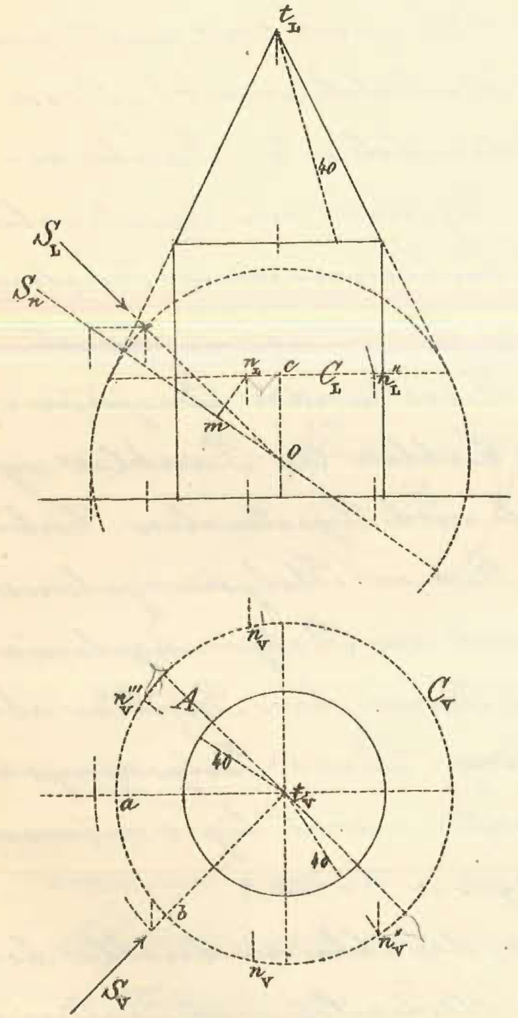
Lad hosstaaende Figur forestille et Snit, lagt gennem Kuglens Centrum og en Lysstraale. Punktet p har da en Belysningsintensitet, der er proportional med $\cos i = \frac{om}{r}$. Sættes Radius = 100, giver om (maalt paa samme Maalestok som r) altsaa Punktet p's Belysningsintensitet i %. Tænke vi os nu, at vi dreje hele Figuren om Lysstraalen S gennem Centrum, vil Cirklen beskrive Kuglen, Punktet p en Cirkel C, hvis Plan staar vinkelret paa S. Normalen N vedbliver under Drejningen at være Normal i Cirklen C's Punkter og at danne samme Vinkel med Lysstraalen. Cirklen C bliver med andre Ord en Belysningslinie paa Kuglen, idet man ved en Belysningslinie paa en Flade forstaar en Kurve, hvis Punkter alle have samme Belysning. Dens Belysningsintensitet i % er som ovenfor nævnt lig om (maalt paa en Maalestok, som giver r = 100).



Den Del af Kuglen, der ikke er direkte belyst, tænke vi os (i Overensstemmelse med Definitionen i № 19) belyst af Reflexlys, der giver

NB

samme Belysningsintensitet i ethvert Punkt, som vi vilde faa, hvis Lysretningen blev vendt om og Intensiteten halveret. Cirklens C_1's Belysningsintensitet i % bliver derfor lig $\frac{1}{2}$ o n (maalt paa ovennævnte Maalestok).



Vi vende nu tilbage til Keglen og Cylinderen (se Fig.). I Keglen indskrive vi en Kugle, hvis Radius er 50 m/m; den rører Keglen langs Cirklen C. I ethvert Punkt af denne Cirkel have de to Flader fælles Normal og derfor samme Belysningsintensitet. Da Keglens Belysningslinier ere Frembringere, kunne disse altsaa tegnes, saasnart man kender de Punkter paa Cirklen C, som have Intensiteterne 0, 10%, 20% ......, d. v. s.

de Punkter, i hvilke C skæres af Kuglens Belysningslinier.

For at finde disse Punkter dreje vi Kuglen og Lysstraalen S gennem Kuglens Centrum om Keglens lodrette Akse indtil S bliver parallel med L; Kuglens Belysningslinier vise sig da i lodret Billede som rette Linier, vinkelrette paa S_n. Vil man nu f. Eks. konstruere den Belysningslinie paa Keglen, hvis Intensitet er 40%, afsætte vi om lig $40 \cdot \frac{50}{100} = 20$ m/m og oprejse i m en Linie vinkelret paa S_n til Skæring med C_L i n_L. Dette Punkt repræsenterer to Punkter paa Cirklen C, hvis vandrette Billeder ere n_V og n'_V, og som nu kunne drejes tilbage til n'' og n''' ($\smile n_V n''_V = \smile n'_V n'''_V = \smile ab$). Den søgte Belysningslinie bestaar da af Frembringerne tn'' og tn'''.

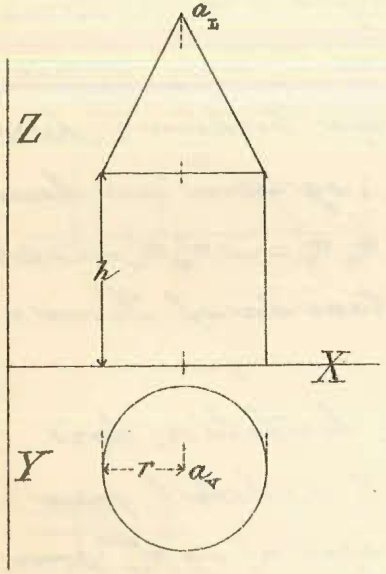
Konstruktionen af n_V og n'_V bortfalder, hvis man gennem t_V tegner Linien A vinkelret paa S_V og (ved Hjælp af Passeren) opsøger n''_V og n'''_V som Punkter paa C_V, hvis Afstande fra A er lig cn_L. Rigtigheden heraf indses let.

Hvad Cylindren angaar, kunde man paa lignende Maade som ved Keglen benytte en ind=

skreven Kugle (hvis Radius dog ikke kan blive 50 m/m), men det er her fordelagtigere at bruge den i № 19 angivne Methode. Ved Konstruktionen af Diametren i den der anvendte Cirkel benytter man den drejede Lysstraale S_n.

№ 22. [M.B.] Skraa Afbildning.

Givet en retstaaende cirkulær Cylinder og en retstaaende Kegle i hosstaaende Stilling.



Bestem Skyggen for parallele Lysstraaler med sædvanlig Retning.

	x	y	z
a:	66	77	121

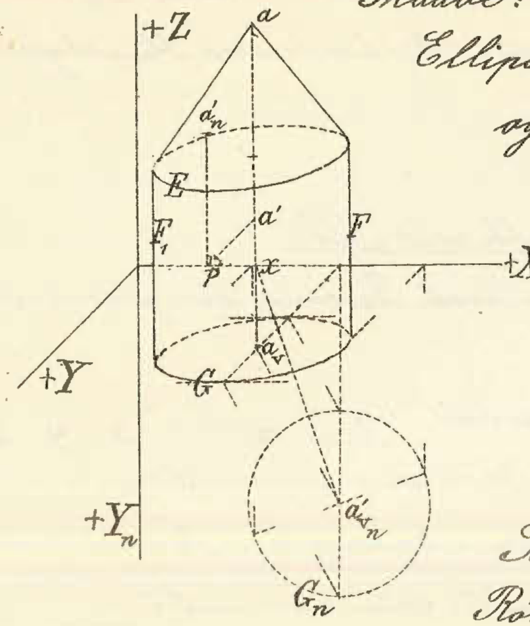
$h = 66$

$r = 27.$

Man begynder med at tegne Cylinderens Grundflade i Nedlægning og fører et tilstrækkeligt Antal Punkter (f. Eks. 12) tilbage.

For at konstruere Omridsfrembringerne for

Cylinderen og Keglen gaar man frem paa følgende Maade: F og F_1 ere Tangenter til Ellipsen G; de kunne altsaa ogsaa opfattes som Billeder af et Par Linier beliggende i XY-Planen; i saa Fald ere de parallele med Linien $a_v\, x$, der er nedlagt som $x\, a_{v_n}$.



Bestemmer man altsaa Røringspunkterne for Tangenter til G_n, parallele med $a_{v_n}\, x$, og fører disse Punkter tilbage, faas herved de Punkter, hvori F og F_1 røre G. Tangenterne fra a til Ellipsen E bestemmes paa lignende Maade. I Fig. er Keglen først forskudt lodret ned efter, indtil den faar G til Grundflade, Toppunktet i a' ($a'\, a_v$ = Keglens Højde). Tangenterne fra a' til G, kunne nu ogsaa opfattes som Billeder af Linier i V, idet vi betragte a' som skraat Billede af et Punkt i V. a' nedlægges da paa samme Maade som a_v og kommer til a'_n ($p\, a'_n = 2 \cdot p\, a'$).
Røringspunkterne for Tangenter fra a'_n til G_n be-

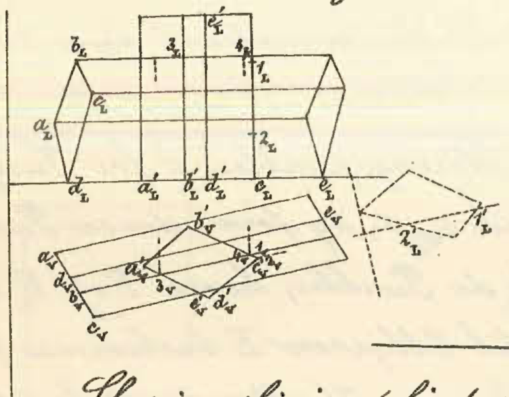
stemmes og föres tilbage o. s. v.

Ved Hjælp af Nedlægning bestemmes ogsaa nöjagtigt de Punkter, hvori Cylinderens Slagskygges Omridslinie rörer G.

Nº 22 a. [F.] Dobb. retv. Afb.

Et lodret og et vandret Prisme ere givne i hosstaaende Stilling.

Find Skæringslinien



	x	y	z		x	y	z
a:				a':			
b:				b':			
c:				c':			
d:				d':			
e:				e':			

Skæringslinien findes her bedst, idet man söger Skæringspunkterne mellem Kanterne i det ene Prisme og Sidefladerne i det andet og omvendt og derpaa forbinder Punkterne paa rette Maade.

I denne Hensigt indföres en ny lodret Billedplan, vinkelret paa det vandrette Prismes Kanter; paa denne Billedplan projiceres nu det vandrette Prismes Kanter som Punkter (Side-

fladerne som rette Linier), de lodrette Prismekanter som lodrette Linier. Skæringspunkterne mellem Kanterne i det lodrette Prisme og Sidefladerne i det vandrette faas altsaa straks af Hjælpeprojektionen, medens Skæringspunkterne mellem de vandrette Prismekanter og Sidefladerne i det lodrette Prisme findes umiddelbart af vandret Billede.

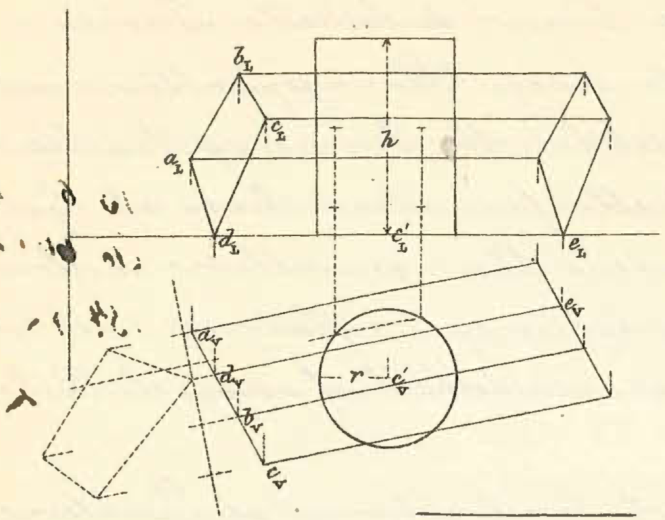
I Fig. er vist Konstruktionen af Punkterne 1, 2, 3 og 4, hvoraf de to ligge paa en Kant i det ene, de to andre paa en Kant i det andet Prisme.

Angaaende den Orden, hvori Punkterne skulle forbindes, henvises til Opgave Nº 16 (idet vi her ligesom der have anvendt lodrette Hjælpeplaner, parallele med det vandrette Prismes Kanter). Forövrigt indses det her let umiddelbart i hvilken Orden, Punkterne skulle forbindes.

Nº 22 b. [F]. Dobb. retv. Afb.

Givet en lodret Cylinder og et vandret Prisme (se Tegningen næste Side).

Find Skæringslinien.



	x	y	z
c':			
r =		h =	

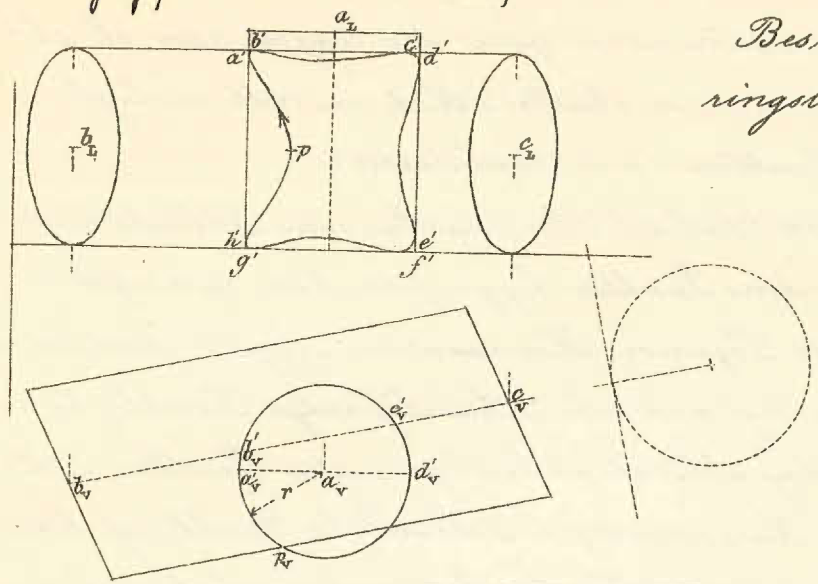
	x	y	z
a:			
b:			
c:			
d:			
e:			

Vi anvende her ligesom i forrige Opgave en ny lodret Billedplan, vinkelret paa Prismets Kanter. En vilkaarlig Frembringer i Cylinderen behandles derpaa paa samme Maade som en Kant i det lodrette Prisme. Specielt findes de Punkter, der ligge paa Cylinderens Omrids og paa Prismets Kanter, samt de Punkter, der have vandrette Tangenter (øverste og nederste Punkter i de Ellipsestykker, hvoraf Skæringskurven er sammensat).

Nº 23 [F.M.B.] Dobb. retv. Afb.

Givet en vandret og en lodret Omdrejningscylinder, den første hvilende paa V med skraat afskaarne Endeflader (se Tegningen næste Side).

begrænset lodret), dernæst behandles det andet Legemes Billeder paa samme Maade. – Alt, hvad der nu ikke er overstreget er synligt. Konturer synlige ved Skæringsliniens Skæringsp. med Konturerne, naarfremt Skæringslinien er synlig paa dette Sted. (P. Rasmussen)



Bestem Skæringslinien.

	x	y	z
a:	93	57	70
b:	26	66	26
c:	134	42	26

r = 26

Skæringskurven findes lettest ved at projicere ind paa en ny lodret Billedplan, vinkelret paa den vandrette Cylinders Frembringere; her vil den vandrette Cylinder projiceres som en Cirkel (en vilkaarlig valgt Frembringer som et Punkt), en Frembringer paa den anden Cylinder som en lodret Linie, og Skæringspunkterne mellem denne Frembringer og den vandrette Cylinder haves altsaa straks. – Specielt maa man naturligvis søge de Punkter af Skæringskurven, der ligge paa Legemernes Konturer, hvor Kurven altsaa gaar over fra at ligge paa den synlige Del af vedkommende Legeme til den usynlige, eller omvendt. (Dette gælder altid, hvor vi faa med en Kurve at göre, der ligger paa et eller flere Legemer; vi skulle altid, saavidt muligt, konstruere Punkterne paa Konturerne).

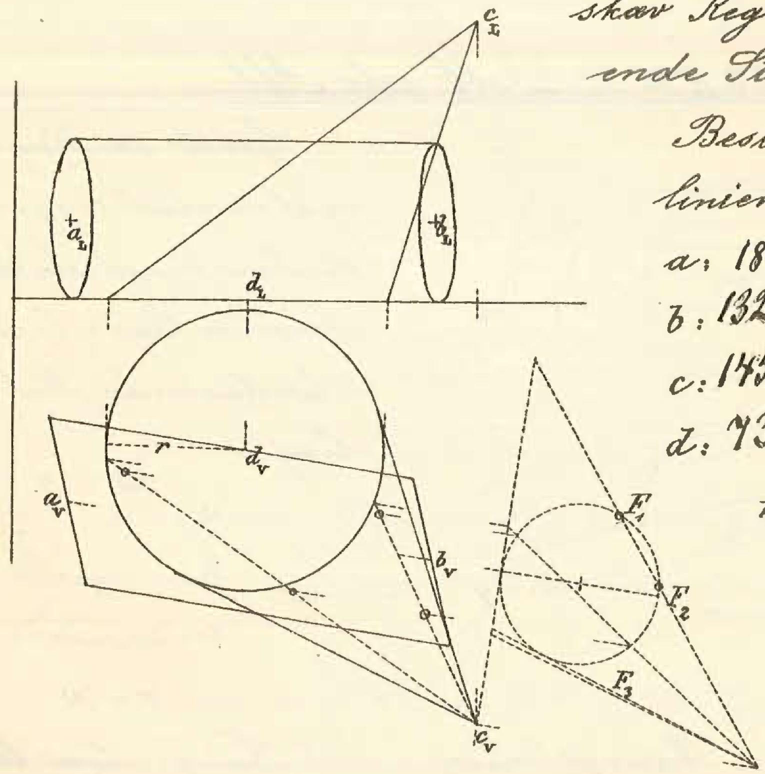
Skal en Del af Skæringskurvens Billede trækkes op, maa dens Punkter ligge paa den synlige Del af begge Legemer. Har man nu afgjort, hvorledes det forholder sig med eet vilkaarlig valgt Punkt, behöver man dog ikke at undersöge andre Punkter, idet man fölger Kurven ud fra det valgte Punkt, og hver Gang, den passerer en Kontur, holder Regnskab med, hvor den begiver sig hen.

I ovenstaaende Fig. vil f. Eks. Punktet p af Skæringskurven ligge paa den forreste (i lodret Billede synlige) Del af begge Legemer; fölge vi nu Kurven i den ved Pilen angivne Retning, vil den i a' gaa om paa den bageste (usynlige) Del af den lodrette Cylinder; i b' gaar den dernæst tillige om paa den usynlige Del af den vandrette Cylinder (om Kurven, idet vi gaa ud fra p först passerer a' eller b', ses af vandret Billede); i c' kommer den frem paa den synlige Del af den vandrette og i d' tillige paa den synlige Del af den lodrette Cylinder o. s. v. Kurvestykkerne (h'-a') og (d'-e') skulle altsaa trækkes op.

Passerer Kurvens Billede (f. Eks. det lodrette) begge Legemers Konturer paa en Gang, faar Kurvens Billede her en Spids, idet Tangenten til Kurven da bliver vinkelret paa vedkommende Billedplan.

№ 24 [FM.B.] Dobb. retv. Afb.

Givet en vandret Omdrejningscylinder, der hviler paa V med skraat afskaarne Endeflader, og en skæv Kegle i hosstaaende Stilling.

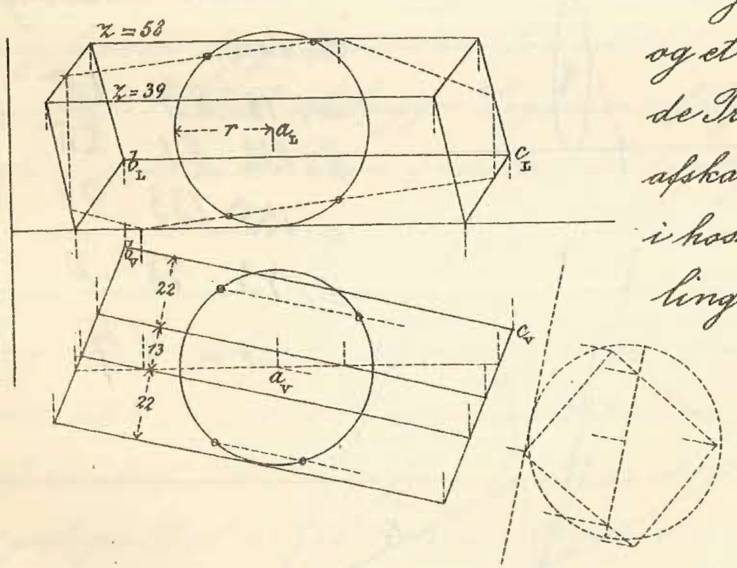


Bestem Skæringslinien.

a: 18 63 25
b: 132 81 26
c: 145 133 91
d: 73 48 0
r = 44

Vi indføre atter her en ny lodret Billedplan, vinkelret paa Cylinderens Frembringer, og Opgaven løses nu let; ligesom i forrige Opgave maa man naturligvis specielt konstruere de Punkter, der ligge paa alle Omridsfrembringere. Desuden konstrueres de to Cylinderfrembringere, der i Hjælpeprojektionen ere projicerede som F_1 og F_2 samt de to Keglefrembringere, hvis Billeder sammesteds falde sammen i F_3; alle disse fire Frembringere blive Tangenter til Skæringskurven.

Nº 25. [F.M.B.] Dobb. retv. Afb.



Givet en Kugle og et vandret liggende Prisme med skraat afskaarne Endeflader i hosstaaende Stilling.

	x	y	z
a:			
b:			
c:			

r = 30

Bestem Skæringslinien samt Tangenten til et Punkt af samme.

Afbilde vi paa en ny lodret Billedplan, vinkelret paa Prismets Kanter, bliver hele Prismet afbildet som en Firkant, Kuglen som en Cirkel. Vi overskære nu begge Legemer med vandrette Planer; disse skære Kuglen i vandrette Cirkler, hvis Radier maales i Hjælpeprojektionen, og Prismet i vandrette Linier, parallele med Kanterne. I Fig. er vist Konstruktionen af de Punkter, der ligge paa Kuglens vandrette Omrids. De Punkter, der ligge paa Kuglens lodrette Omrids, faas ved at overskære begge Legemer med en Frontplan gennem Kuglens Centrum (Konstruktionen er vist i Fig.).

Hvad Konstruktionen af Tangenten angaar henvises til Nº 18 b.

[M.B.] V. Perspektivisk Afbildning.

De første Begyndelsesgrunde (Definition af Hovedpunkt, Distance, Retninger o. s. v.) forudsættes bekendte.

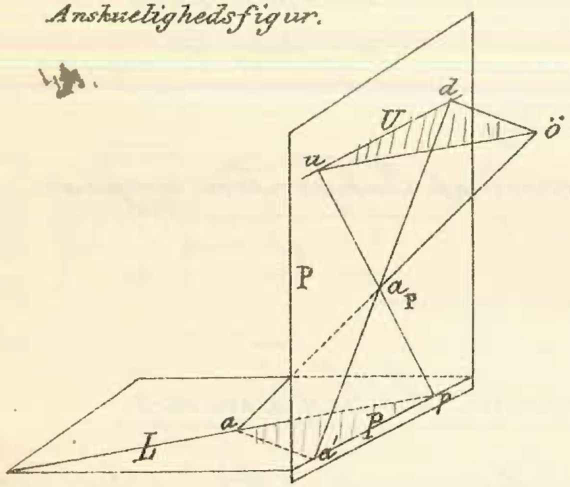
Førend vi gaa over til selve Opgaven, ville vi dog vise, hvorledes man, naar det perspektiviske Billede af en Linie er givet, kan finde sand Stør=

relse af Afstanden mellem to Punkter paa denne Linie, hvis Billeder ere givne, eller omvendt, hvorledes man, naar en Linies Billede er givet, fra et af dens Punkter kan afsætte et Stykke af given Længde.

Lad P betegne Perspektivplanen, ö Øjet, L den givne Linie, p og u henholdsvis dens Spor og Retningspunkt, a_P det perspektiviske Billede af a.

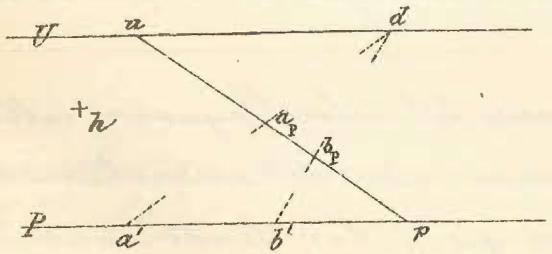
Vi lægge nu igennem u og p to vilkaarlige parallele Linier u d og p a'; vi vælge d vilkaarligt paa u d og trække a a' parallel med ö d; man indser nu let, at Linien a'd gaar igennem a_P.

Fig. 1.
Anskuelighedsfigur.



Idet $\triangle\, u\, ö\, d \backsim \triangle\, p\, a\, a'$ faas: $\frac{a\,p}{a'\,p} = \frac{u\,ö}{u\,d}$; vi se altsaa, at hvis vi vælge d „Delingspunktet" saaledes, at $u\,d = u\,ö$ faas $a'p = a\,p$.

Fig. 2. (Persp. Afb.).



Reglen bliver altsaa følgende: gennem

u og p for den givne Linie lægges to vilkaarlige parallele Linier U og P (hvis vi allerede have saadanne to Linier gennem u og p, kunne disse naturligvis benyttes), dernæst afsættes $u\,d = u\,ö$ (findes som Hypothenuse i en retvinklet Trekant, hvor u h er den ene Kathede, Distancen den anden).

I Fig. 2 er vist, hvorledes man finder sand Störrelse a'b' af Stykket $a_P\, b_P$ paa Linien u p ($a'b' = a'p \div b'p$).

№ 26. Perspektivisk Afbildning.

Der er givet Punkterne: x y z

NB a: som Nr 3

b:

c:

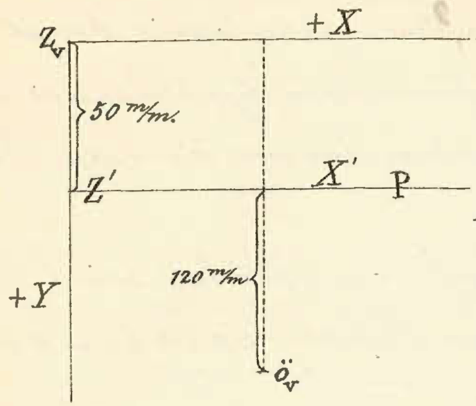
Bestem Sporene for Trekant a b c's Plan i de koordinerede Planer, samt perspektivisk Spor og Retningslinie for samme.

Bestem Billedet af de tre Højder i Trekanten og Koordinaterne til deres Skæringspunkt. som Nr 3

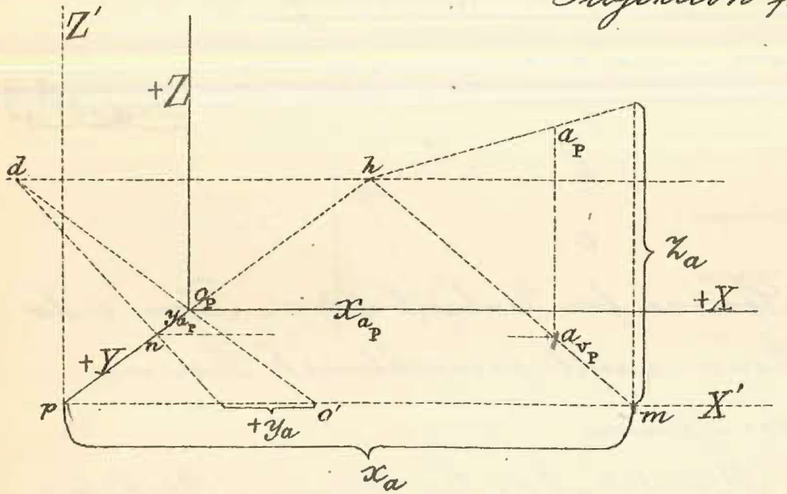
Øjet tages i: $x = 90$, $y = 170$, $z = 70$.

Billedplanen: $y = 50$.

Fig. forestiller en vandret Projektion af Koordinatsystem, Öje og Perspektivplan.



XY-Planen skærer nu Perspektivplanen i en vandret Linie X', YZ-Planen skærer den i en lodret Z'. Hovedpunktet, der som bekendt er Öjets retvinklede Projektion paa Perspektivplanen, har i Forhold til X' og Z' Koordinaterne $x' = 90$. $z' = 70$. Vi begynde nu med at afsætte Hovedpunktet h



midt paa Tegnepapiret og indlægge dernæst Linierne X' og Z' i den rigtige Afstand fra h.

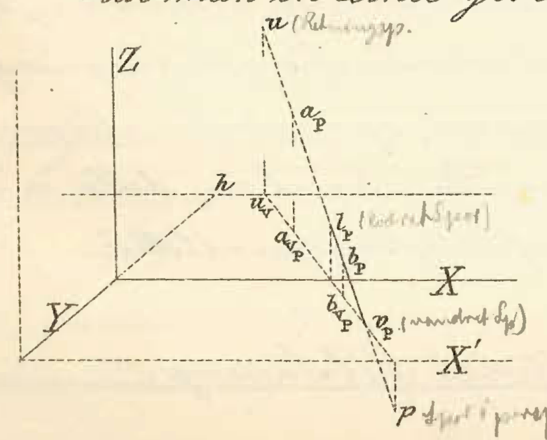
Det gælder nu om at faa afsat o_P saaledes at $o_P\,p$ er Billedet af 50 m/m. Dette göres nu ifölge Sætningen paa Side 82, ved at afsætte hd = 120 m/m

(= hö = Distancen), po' = 50 m/m og drage Linien do', der giver o_P.

Lad os nu antage, at vi kende Koordinaterne (x_a, y_a, z_a) for et Punkt a; vi ville da vise, hvorledes vi finde de perspektiviske Billeder af a og a_v. Vi afsætte x_a ud ad X' som vist i Fig., Linien hm er nu parallel med Y-Aksen og paa denne maa altsaa a_{v_P} (det perspektiviske Billede af a_v) ligge. Vi afsætte derpaa y_a ud fra o' saaledes som vist, (havde y_a været negativ, skulde den have været afsat til den modsatte Side), o_P er da Billedet af y_a, afsat ud ad Y-Aksen, og a_{v_P} bestemmes nu som vist.

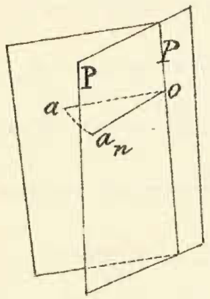
Nu skal endelig a_P bestemmes saaledes, at $a_P\,a_{v_P}$'s sande Störrelse er lig z_a; dette sker ved at afsætte z_a fra m saaledes som vist i Fig.

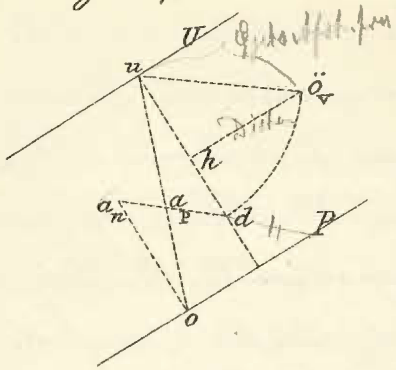
Har man en Linie givet ved to Punkter (a og b), bestemmes dens lodrette og vandrette Spor samt Spor i Perspektivplanen som vist i Fig. Endelig kan Linien ab's Retnings=



punkt bestemmes derved, at dets vandrette Projektion afbildes paa Horizontlinien.

Nedlægning af en Plan om en Frontlinie



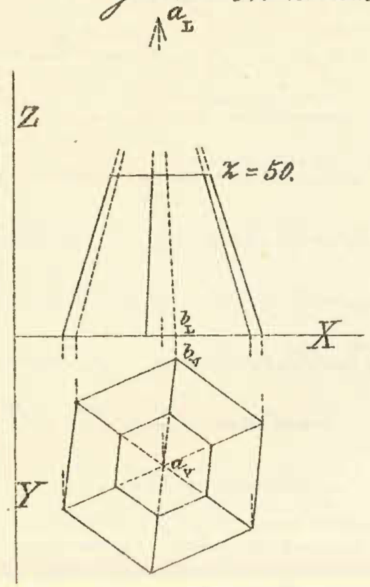


(i Fig. specielt Sporet i Perspektivplanen) udføres paa følgende Maade, idet Planen tænkes givet ved Retningslinie U og Spor P:

NB Punktet a beskriver en Cirkel $a\,a_n$, hvis Plan staar vinkelret paa P, og som har Centrum o paa P. Linien a o ligger dels i den givne Plan og har derfor sit Retningspunkt u paa U; desuden ligger den i Cirklens Plan, hvis Retningslinie gaar gennem h og er vinkelret paa P, herved bestemmes u. Kender man nu u, kan man tegne Linien $u\,a_p$ og faar altsaa Centrum o bestemt; efter Nedlægningen viser o a sig vinkelret paa P, og vi skulle altsaa blot afsætte $o\,a_n$ lig sand Størrelse af o a; dette er i Fig. udført ved Hjælp af Delingspunktet d.

Nº 27. Perspektivisk Afbildning.

Givet en seksidet regulær Pyramidestub, hvor



a: (40, 80, 100) b (45, 46, 0)

Bestem Skyggen for en Lysretning, hvis Billeder danne 45° med Koordinatakserne.

Billedplanen lægges gennem det forreste Punkt af Pyramidestubben ≠ X-Z Planen.

Øjet tages i x = 120 z = 80

Distancen = 120

Koordinatsystemets Billede tegnes paa samme Maade som i forrige Opgave; for at tegne Billedet af Grundfladen gør man bedst i at benytte sig af en Nedlægning, idet man drejer XY-Planen om X' ind i Perspektivplanen.

Man kan som Kontrol for Tegningens Nøjagtighed her benytte sig af, at alle parallele Linier skulle have samme Retningspunkt.

Har man et Punkt a og et lysende Punkt s, findes a's Skygge a_s paa den vandrette Plan paa den i Fig. 1 antydede Maade. Er s uendelig fjernt, er s_v det ogsaa, og s_{s_p} ligger fölgelig paa H.

Fig. 1. (Anskuelighedsfigur).

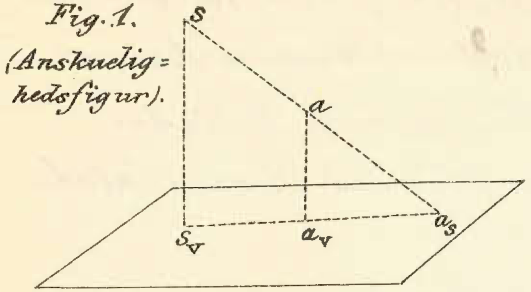
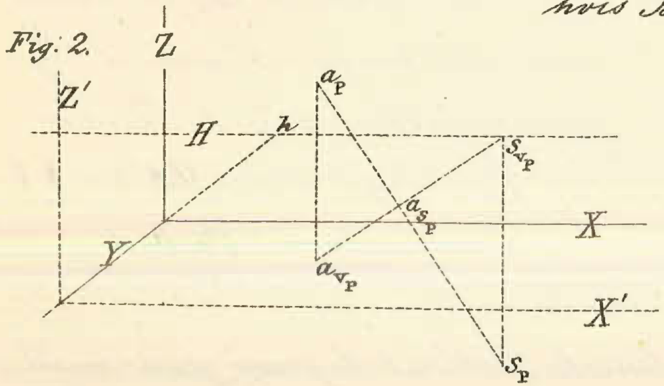


Fig. 2.



I Fig. 2 er Konstruktionen udfört i perspektivisk Afbildning under Forudsætning af uendelig fjernt lysende Punkt, hvis Billede er s_p (findes ved en Lysstraale gennem ö).

Er det lysende Punkt uendelig fjernt i den i Opgaven angivne Retning, vil en Lysstraale gennem ö ligge 1, i en lodret Plan, der danner en Vinkel paa 45° med Perspektivplanen 2, i en Plan, parallel med förste Halveringsplan (og som altsaa ogsaa danner en Vinkel paa 45° med Perspektivplanen); begge disse Planers Spor i Perspektivplanen ere Tangenter til Distancecirklen, deres Skæringspunkt er s_p.

Nº 28. Perspektivisk Afbildning.

Givet en retstaaende Kegle med cirkulær Grund=

flade. Toppunktet er: 50, 43, 85, og Radius i Grundfladen = 28.

Bestem Skyggen for parallele Lysstraaler med sædvanlig Retning.

Billedplanen lægges gennem det forreste Punkt af Keglen ≠ X-Z-Planen.

Öjet tages i $x = 120$ $z = 60$

Distancen = 120

Denne Opgave löses ganske paa samme Maade som den foregaaende; kun angaaende Konstruktionen af Keglens Konturfrembringere skal her tilföjes et Par Ord:

Toppunktet t afbildes som t_p, Grundfladen C som Ellipsen E; det er Tangenterne fra t_p til E, vi skulle konstruere. Forlænges Linien tö, vil den skære den vandrette Plan i t', og Tangenterne fra t' til C ville ogsaa afbildes som de sögte Omridsfrembringere.

Vi kunne altsaa konstruere disse saaledes: t_p betragtes som Billede af Punktet t' i den vandrette Plan. Idet vi nu nedlægge C om X', lade vi t' fölge med, konstruere Tangen=

Fig. 1.
(Anskuelighedsfigur).

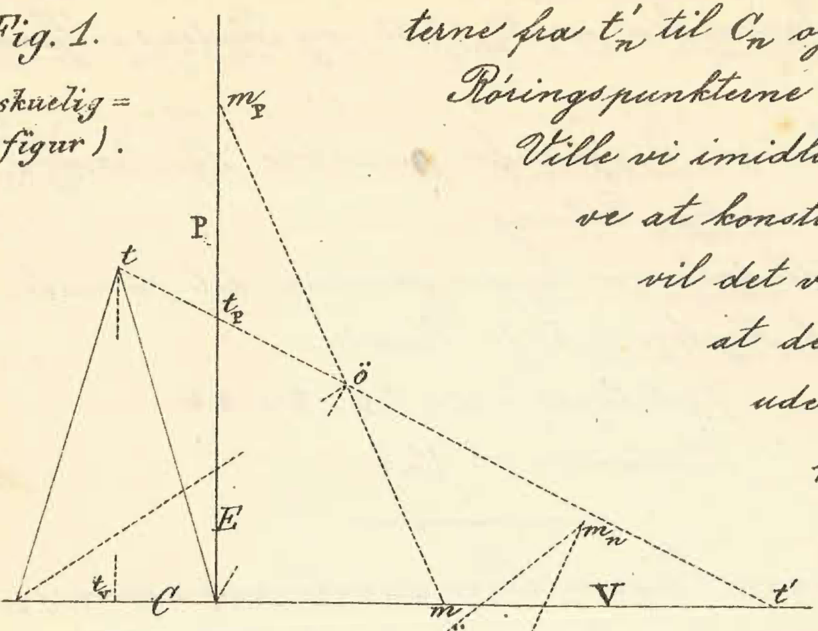
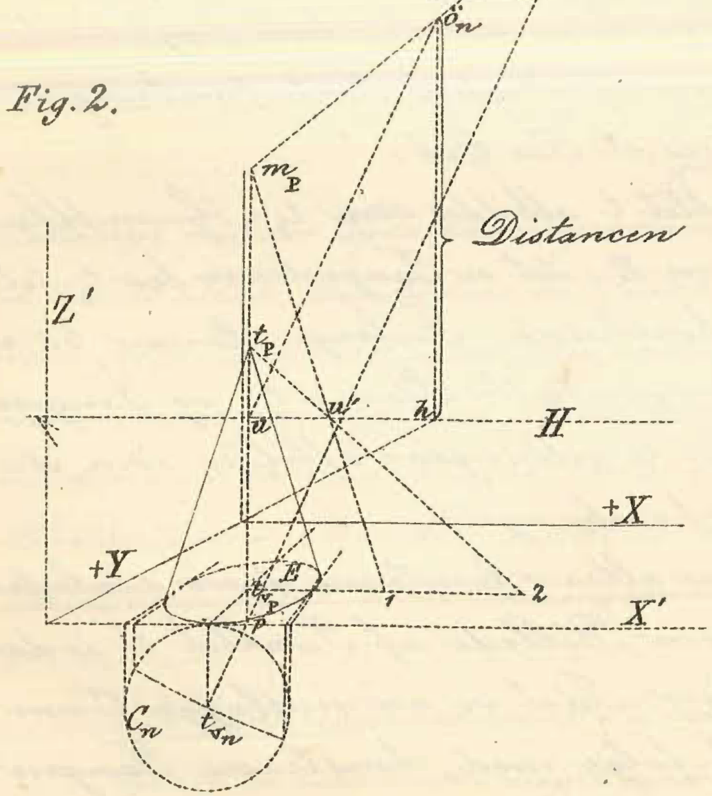


Fig. 2.



terne fra t'_n til C_n og føre Røringspunkterne tilbage. Ville vi imidlertid prøve at konstruere t'_n, vil det vise sig, at det faldt udenfor Papiret, og vi maa derfor hjælpe os paa anden Maade. Kunne vi blot finde Nedlægningen af Midtpunktet m af Li-

nien $t't_v$, kunne vi med m som Centrum slaa en Cirkel igennem t_{v_n}; denne Cirkel skærer da C_n i de ovenfor omtalte Røringspunkter for Tangenterne fra t'_n.

Det er nu for det første Konstruktionen af m_P og dernæst Nedlægningen af m, der er udført i Fig. 2.

For at finde m_P gaar man frem saaledes, idet vi erindre, at t_P ogsaa er Billede af t': gennem t_v trækkes en vandret Frontlinie, og ud ad denne afsættes $t_v 1 = (1-2)$, hvorefter Linierne $2 t_P$ og $1 u'$ (der ere parallele, da de have samme Retningspunkt u') drages; herved findes m_P. At m_P kan falde udenfor $t_{v_P} t_P$ vil let forstaas ved Betragtning af Fig. 1.

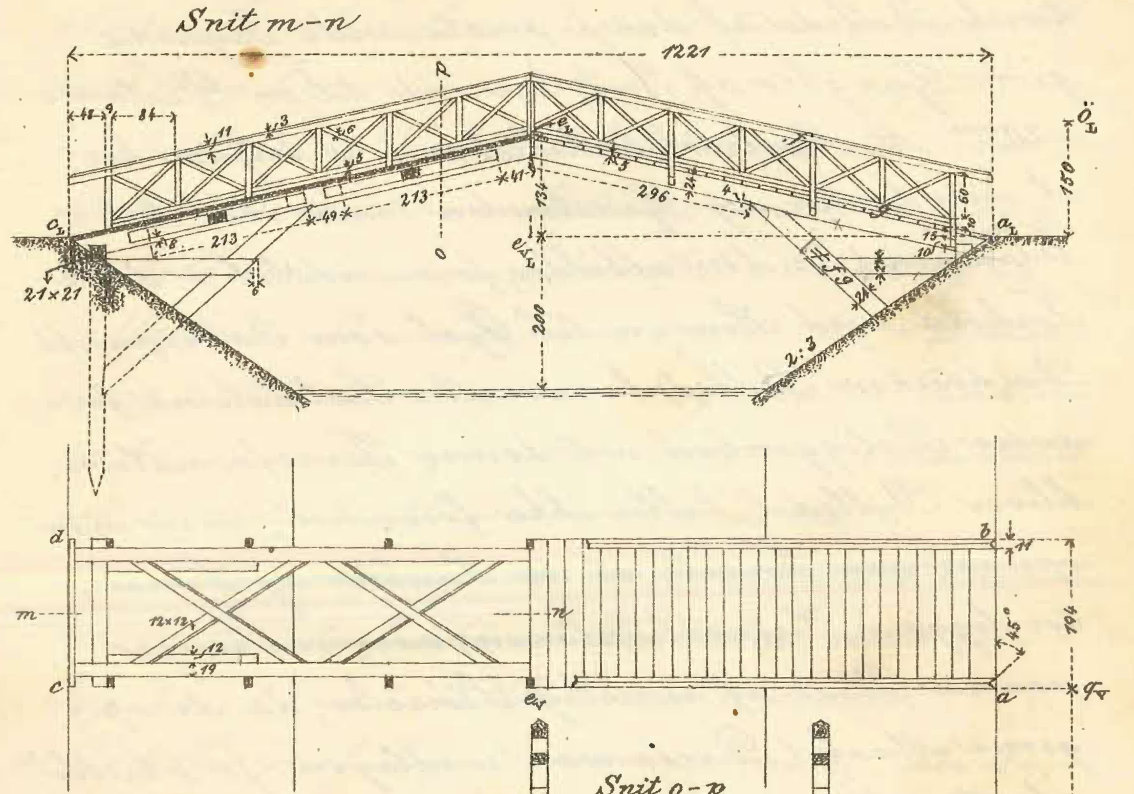
Linien $t't_v$ ligger i den vandrette Plan, dens Spor i Billedplanen er altsaa p, dens Retningspunkt u; Punktet t_v, der ligger paa denne Linie, er nedlagt som t_{v_n}, og Liniens Nedlægning er altsaa $t_{v_n} p$, men da disse Punkter ligge nær ved hinanden, er det en daarlig Bestemmelse af Liniens Nedlægning; vi kunne ogsaa bestemme den paa anden Maade.

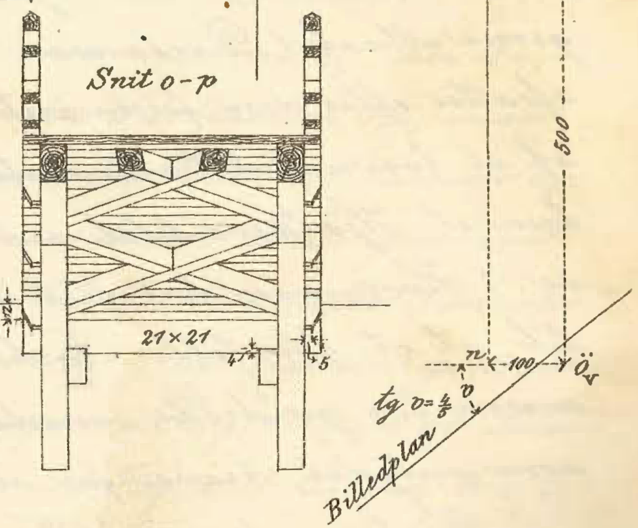
Linien $t't_v$ er i Virkeligheden parallel med Linien $uö$ (ifølge Definitionen for Retningspunkter); Linien $uö$ ligger ogsaa i en vandret Plan (gennem H), og nedlægge vi denne Plan om H, samtidigt med at vi nedlægge XY-Planen om X', saaledes at disse to Planer stadig ere parallele under Drejningen, da vil $uö$ og $t't_v$ ogsaa stadig vedblive at være parallele, og Nedlægningen af $t't_v$ gaar altsaa gennem p og er parallel med $uö_n$.

Som Kontrol paa Tegningens Nøjagtighed kan da bruges, at t_{v_n} skal ligge paa den nedlagte Linie.

Tilbage staar nu kun at afsætte $pm_n = pm$; dette udføres let ved Hjælp af Delingspunktet $ö_n$ (idet man erindrer, at u og p henholdsvis ere Retningspunkt og Spor for Linien $t't_v$).

No 29. Perspektivisk Afbildning.





Distancen = 20 cm.

Maalestoksforholdet = 1:20.

Alle bestemmende Maal ere paaskrevne i cm.

Opgaven gaar ud paa at tegne et perspektivisk Billede af den i omstaaende Tegning givne Gangbro af Træ, svarende til en Distance $= 20^{cm}$. At Maalestoksforholdet er 1:20 betyder her, at man tænker sig Genstanden (men ikke Billedplanen), för den afbildes, formindsket i dette Forhold med Hensyn til Öjet som Fællespunkt. Da hverken Billedplanen eller Sestraalerne forandre Beliggenhed ved denne Transformation, bliver Billedet heller ikke forandret; men man opnaar den Fordel, at de Punkter og Linier, der ligge i Perspektivplanen, sammentrænges paa en Plads af rimelig Störrelse, da de opgivne Maal (Distancen undtagen) jo skulle afsættes efter den formindskede Maalestok. Brugen af et formindsket Maalestoksforhold er altsaa kun et Hjælpemiddel ved Tegningens Udförelse. (Hvor man har frit Valg tages Hensyn til, at et for lille Forhold gör Konstruktionerne for gnidrede, medens et for stort, som antydet, kræver for stor Plads).

Vi begynde med (Fig. 2a) at afsætte Hovedpunktet h og Horizontlinien H samt den

vandrette Linie, hvori Terrainoverfladens Plan skærer Perspektivplanen; denne Linie er parallel med H og ligger i en Afstand af 150^{cm} (maalt paa en Maalestok i Forholdet 1:20) under den. For dernæst at konstruere Retningspunkterne u_1 og u_2, henholdsvis for Linier, parallele med ab og ac, nedlægge vi Planen gennem $ö$ og H ($hö_n$ = Distancen $= 20^{cm}$ i sand Störrelse) og afsætter Vinklerne $hö_n u_1$ og $hö_n u_2$ saaledes som vist (sker bedst ved at beregne Afstandene hu_1 og hu_2).

Det gælder nu om at faa fat i det perspektiviske Billede f. Eks. af Punktet a; dette er i Fig. 2a, 2b og 2c udfört paa 3 Maader.

a. Ved Hjælp af Fig. 1 indses det, at a_p, der bestemmes som Sporet for Sestraalen $öa$, maa ligge for det förste paa Billedet af Linien ac og for det andet paa en lodret Linie gennem Punktet r, hvilket Punkts Bestemmelse kan ske ved Hjælp af Nedlægningen af Planen gennem $ö$ og H med de deri liggende Projektioner af Linierne i Terrainplanen (se Fig. 2a). Linien ac's Billede findes, idet dens Retningspunkt er u_2, dens Spor s_2, hvis Bestemmelse ogsaa vil

Fig. 1.

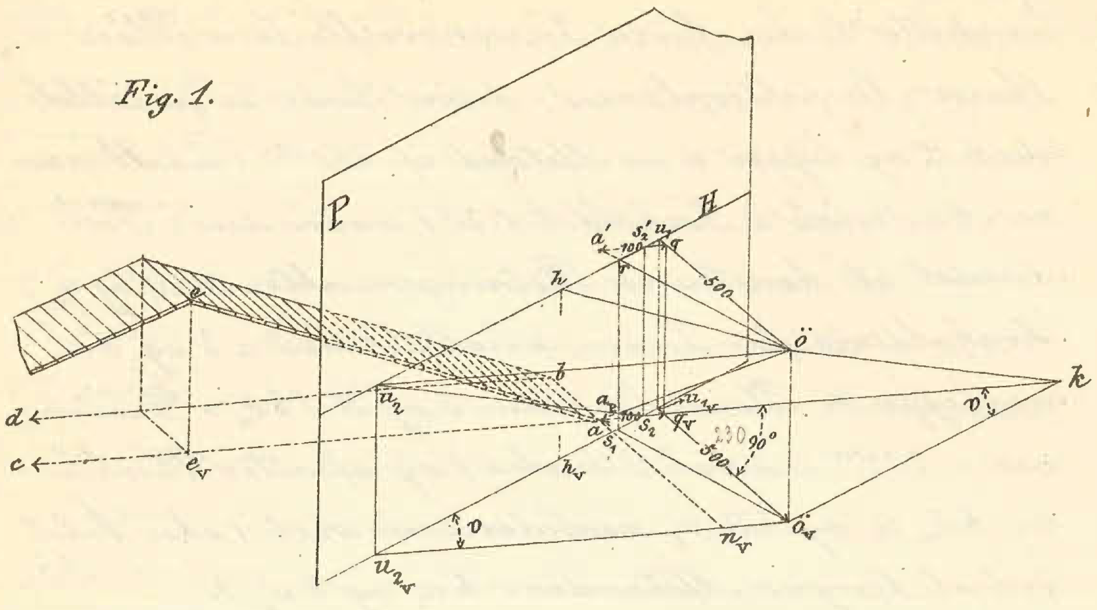
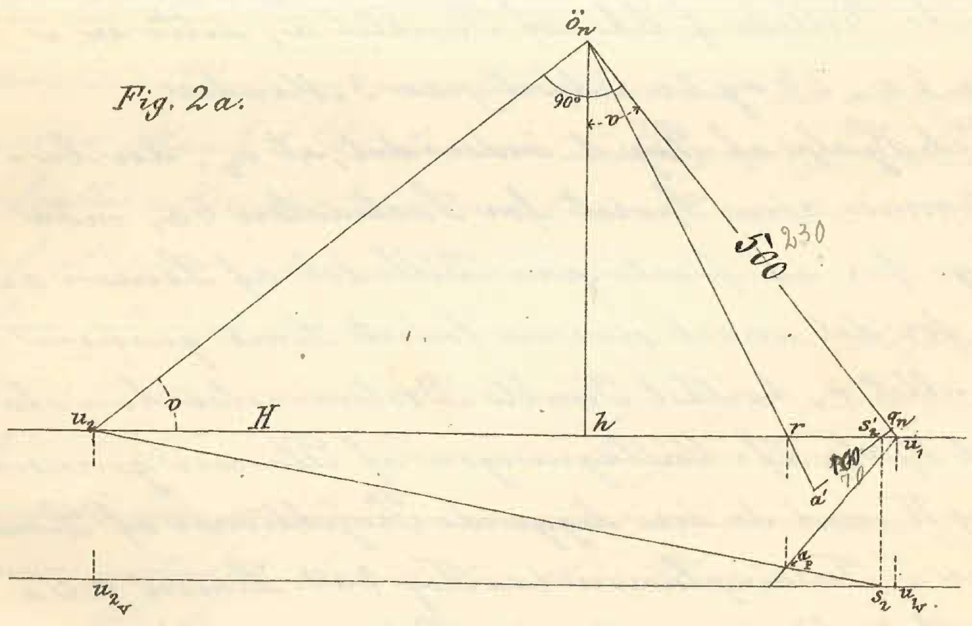


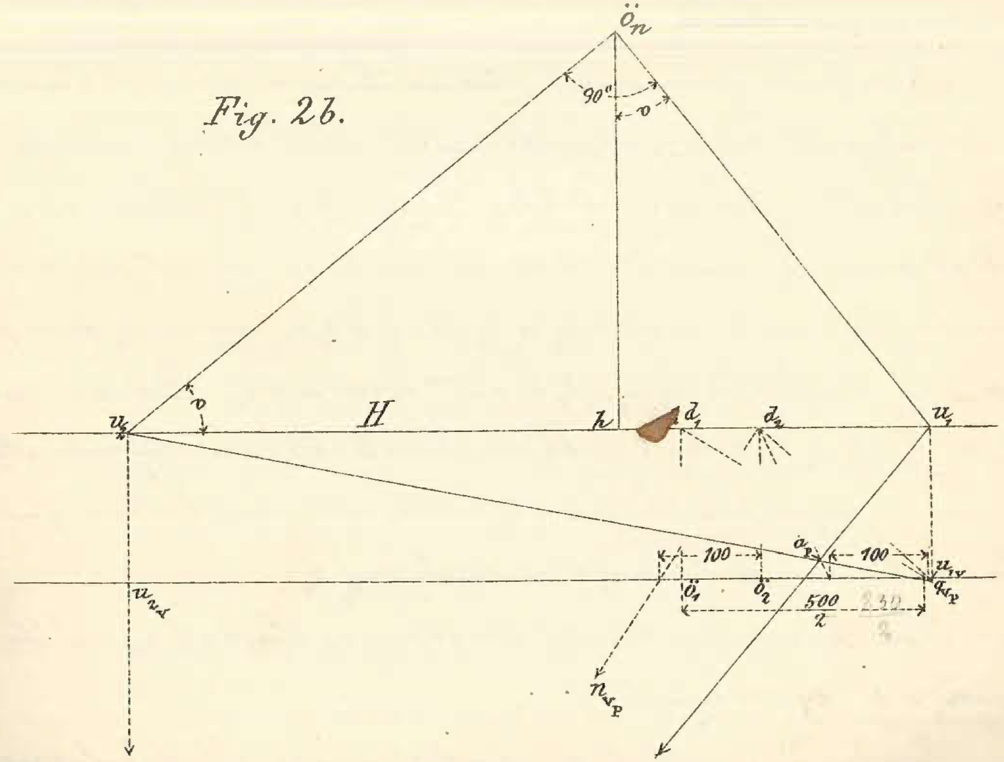
Fig. 2a.



forstaas ved Sammenligning af de to Figurer.

b. Vi kunne bestemme Billederne af Linierne ab og ac paa følgende Maade, idet Retnings=punkterne u_1 og u_2 ere bekendte af det foregaaen=de. Punktet q_v af ac (Fig. 1.) ligger paa u_{1v} $ö_v$. Denne Linies Sestraaleplan er lodret, saa at Li=niens perspektiviske Billede er en lodret Linie gennem dens Spor u_{1v} og Retningspunkt u_1. Fra $ö_v$, hvis perspektiviske Billede er uendelig fjernt, skulle vi nu afsætte $ö_v, q_v = 5^m$; dette er (Fig. 2b)

Fig. 2b.



udført ved Hjælp af Delingspunktet $\frac{1}{2} d_1$ (u---$\frac{1}{2} d_1 = \frac{1}{2} u_1 \ddot{o}_n$). $\ddot{o}_1$ svarer til det uendelig fjærne Punkt af $u_1 u_{1v}$ (Billedet af $\ddot{o}_v$). Halvdelen af 5^m er nu afsat som vist i Fig. og ved en Linie gennem $\frac{1}{2} d_1$ bestemmes det perspektiviske Billede q_{vp} af q_v.

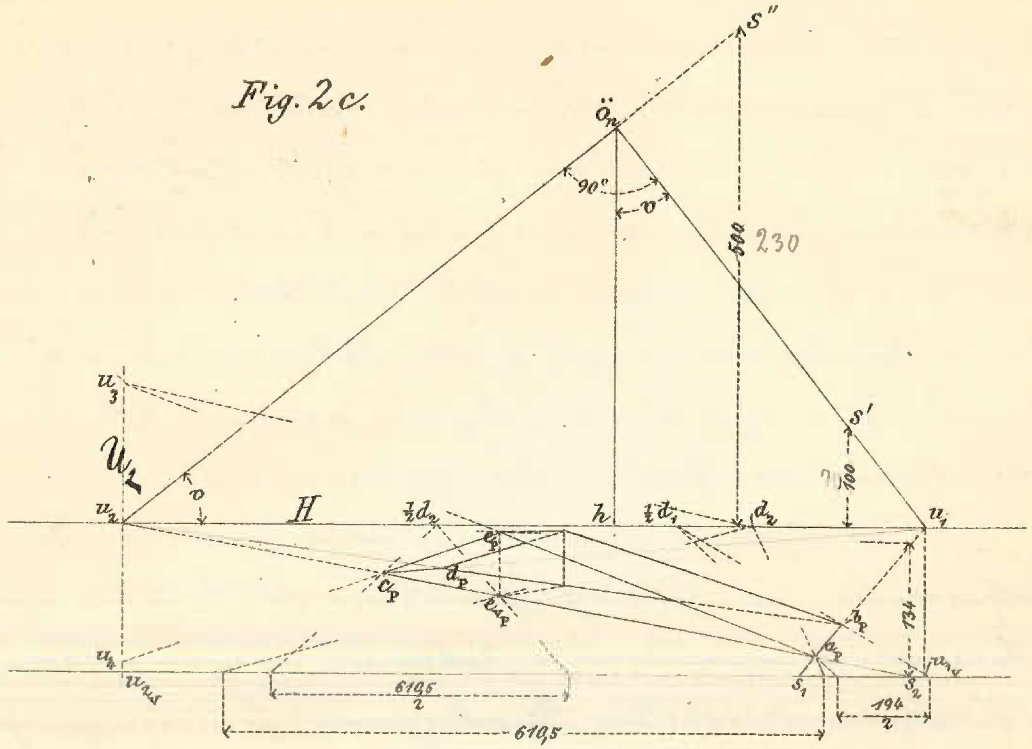
Paa lignende Maade kan Billedet af det Punkt n_v, hvori $\ddot{o}_v u_{2v}$ skærer ab, bestemmes. (Da dette Billede viser sig at falde udenfor Tegnepapiret, er det bedre, som det ogsaa er vist i Fig. 2b, at bestemme Punktet a_p ved at afsætte $q_v a = 1^m$ ved Hjælp af Delingspunktet d_2).

c. En Frontplan gennem $\ddot{o}$ skærer Linien ac i et Punkt k (se Fig. 1), hvis perspektiviske Billede er uendelig fjærnt i Retningen $\ddot{o}k$. Linien ac's Billede er altsaa parallelt med $\ddot{o}k$; man ser da (idet s_2 er det perspektiviske Spor af ac), at $\triangle u_2 u_{2v} s_2 \cong \triangle \ddot{o} \ddot{o}_v k$, saa at s_2 kan findes ved at afsætte $u_{2v} s_2 = \ddot{o}_v k = 5^m$ cosec. $a k \ddot{o}_v$. Da nu $\angle a k \ddot{o}_v = \ddot{o}_v u_{2v} h_v = \ddot{o}_n u_2 h = v$ (Fig. 2c), bliver Konstruktionen følgende: Med Passeren opsøges paa Linien $u_2 \ddot{o}_n$ det Punkt s'', hvis Afstand fra Horizontlinien er 5^m; $u_2 s''$ er da lig $u_{2v} s_2$.

Paa lignende Maade konstrueres Sporet s_1 af Linien ab ($u_1 s' = u_{1v} s_1$). ——

Kender man først a_p, finder man Billederne

Fig. 2c.



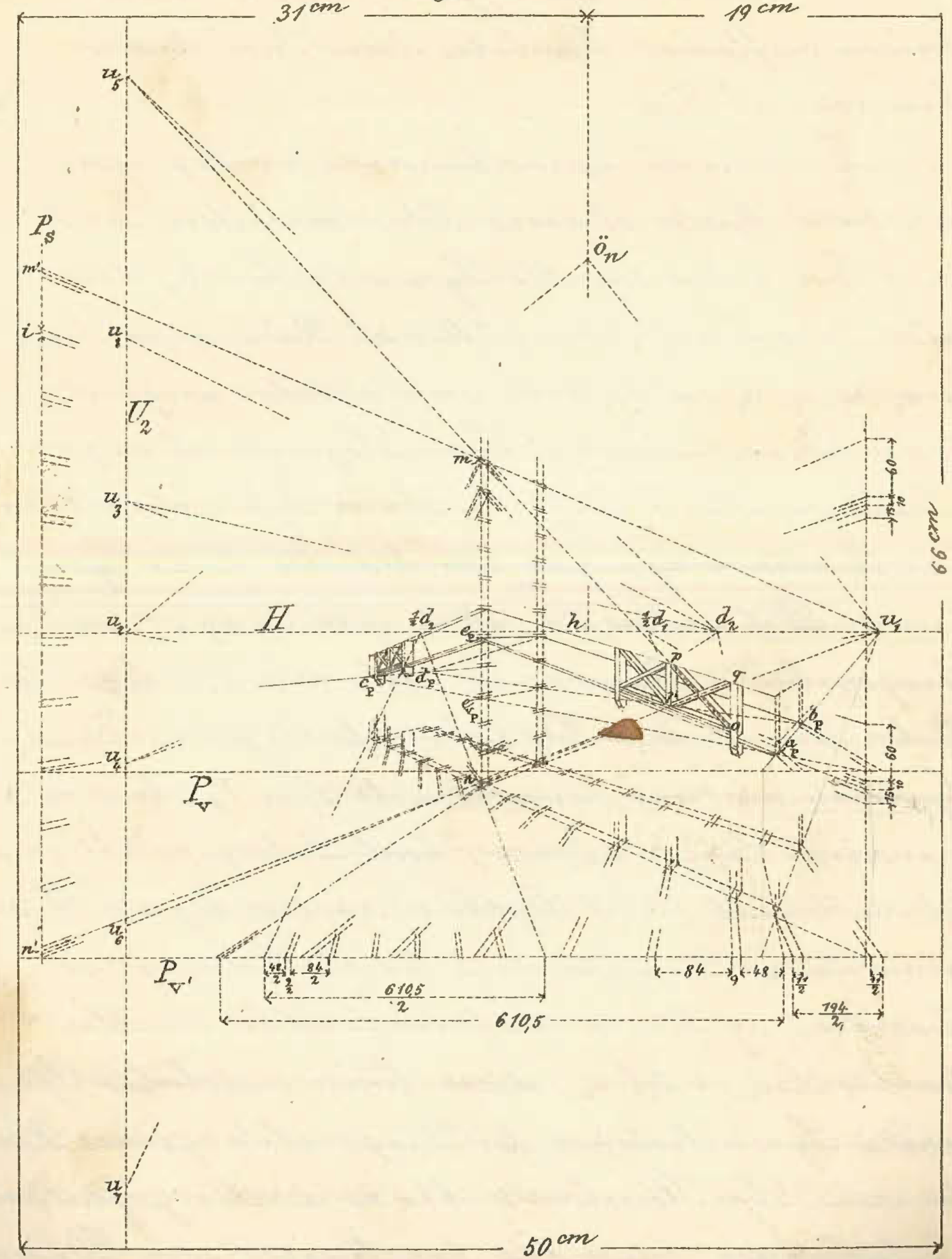
af bc og d samt Midtpunktet e_v af ac ved Konstruktioner, som ere bekendte fra de foregaaende Opgaver. I Fig. 2c er f. Eks. Stykket $a e_v$ afsat ved Hjælp af Delingspunktet d_2, derefter $e_v c$ ved Hjælp af $\frac{1}{2} d_2$. Punktet e's Billede er derpaa fundet ($e_v e = 134^{cm}$, se Fortegningen), og man kender da Billederne af Linierne ae og ec; deres Retningspunkter u_3 og u_4 ligge paa den lodrette Retningslinie V_2 for Planen aec, samt i lige store Afstande fra H.

Retningspunkterne u_3 og u_4 kunne ogsaa konstrueres direkte paa følgende Maade: Da Linierne ö u_2 og ö u_3 henholdsvis ere parallele med $a\,e_v$ og $a\,e$ (ifl. Definitionen af Retningspunkter), er $\angle\, u_2$ ö u_3 $= e_v\,a\,e$; drejes nu den Plan, der indeholder Øjet ö og Retningslinien U_2, om denne ind i Perspektivplanen, falder ö i d_2, saa at den omtalte Vinkel viser sig i sand Störrelse som $\angle\, u_2\, d_2\, u_3$. Man bestemmer altsaa u_3 saaledes at $\angle\, u_2\, d_2\, u_3$ bliver lig $\angle\, e_v\, a\, e$, som let konstrueres ved Hjælp af de opgivne Maal.

Paa lignende Maade gaar man frem ved Bestemmelsen af Retningspunkterne for Udfyldningskorsene (Diagonalerne) i Rækværket, Afstivningskorsene (Vindkorsene) mellem Brodragerne, Jordskraaningernes Faldlinier o.s.v., nemlig overalt, hvor man söger Retningspunktet for Linier, der skulle være parallele med en bekendt Plan og danne en given Vinkel med en i Planen beliggende given Linie. Med Hensyn til Diagonalernes Retningspunkter indses (Fig. 3), at $u_3 u_5 = u_6 u_3 = u_4 u_8 = u_7 u_4$; man behöver altsaa kun at konstruere det ene direkte, f. Eks. u_5.

Af Fig. 3 ses Konstruktionen af Rækværket. Först konstrueres Haandlisten og Fodlisten (ikke fuldstændig udfört i Fig.); dernæst Opstanderne, hvis lodrette Kanter bestemmes ved deres Spor i

Fig. 3.



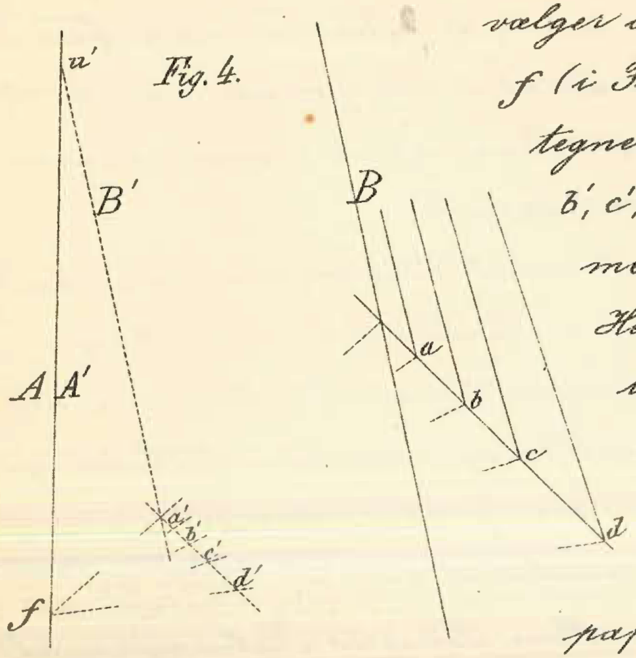
en vandret Plan V', der ligger (f. Eks.) 2^m under Terrainoverfladen; hvorledes disse Spor findes fremgaar af Fig.

Diagonalstangerne kunne, som Fig. viser, tegnes ved Hjælp af deres Retningspunkter samt deres Spor i den lodrette Symmetriplan S, der deler Broen paa tværs. (Efter at Retningspunkterne u_5, u_6, u_7, u_8 ere bestemte som ovenfor angivet, tegnes Diagonalerne i Parallelogrammet o q p r (Retningspunkter u_5 og u_6); de skærer Symmetriplanen i to Punkter m og n paa den lodrette Linie gennem e. Det indses da, at de med op og qr analoge Diagonaler (i Planen a e c) dele m n i 11 lige store Dele. En saadan Inddeling foretages nu paa Symmetriplanens perspektiviske Spor P_s, hvor m'n' er sand Længde af m n; hvert Delingspunkt göres til Midtpunkt for et Stykke i, som er lig en Diagonalstangs Dimension i lodret Retning (se nedenfor), og fra de saaledes fundne Punkter trækkes Linier til u_1; disse Linier indeholde Sporene i Symmetriplanen for Diagonalstangernes Kanter. — Da Störrelsen i ikke er direkte given paa Fortegningen, maa den konstrueres som Diagonalstangens Tykkelse, 6^{cm}, gange cosec. af Stangens Vinkel med en lodret Linie. Denne Vinkel er lig $\angle d_2 u_5 u_2$ eller $\angle d_2 u_8 u_2$, eftersom man betragter de lange eller de korte Diagonaler, og haves altsaa allerede paa Tegningen. Konstruktionen udföres med Passeren alene).

Ved Konstruktionen af Vindkorsene samt ved Brodækkets Inddeling i Brædder faar man Brug for Retningspunkterne for Linier, henholdsvis vinkelrette paa Planerne a b e og c d e. Disse Retningspunkter bestemmes ved fölgende bekendte Sætning: Naar en Linie staar vinkelret paa en Plan, er Forbindelseslinien mellem Liniens Retningspunkt og Hovedpunktet vinkelret paa Planens Retningslinie, og Distancen er mellemproportional mellem Afstandene fra Hovedpunktet til Liniens og Planens Retninger (Retningspunkt og Retningslinie).

Vi skulle her vise, hvorledes man bærer sig ad, naar et Retningspunkt falder udenfor Papirets Grænser. (I nærværende Opgave er dette nemlig Tilfaldet med 3 Retningspunkter, deriblandt de to sidst omtalte). Lad A og B (Fig. 4) være to Linier, hvis Skæring bestemmer det fjærne

Retningspunkt u, og a, b, c, ... en Række Punkter, hvorfra der skal tegnes Linier til u. Man vælger da et vilkaarligt Punkt f (i Fig. er f valgt i A) og tegner en Figur A', B', a', b', c', ... ligedannet med A, B, a, b, c, ... med Hensyn til f som Fallespunkt i et saadant Forhold, at det med u ensliggende Punkt u' falder paa Tegnepapiret. De søgte Linier kunne da tegnes henholdsvis parallele med u'a', u'b', u'c', ...



De øvrige Konstruktioner udføres alle ved Hjælp af det fra tidligere Opgaver bekendte. —

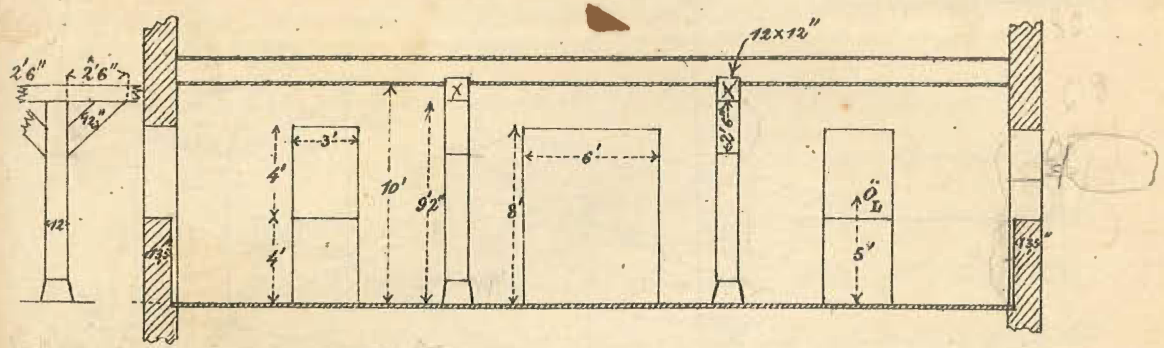
Den færdige Tegning kan være begrænset af en sort Linie, der overalt ligger 3cm indenfor det i almindelig Tegnebogsformat afskaarne Blads Rand.

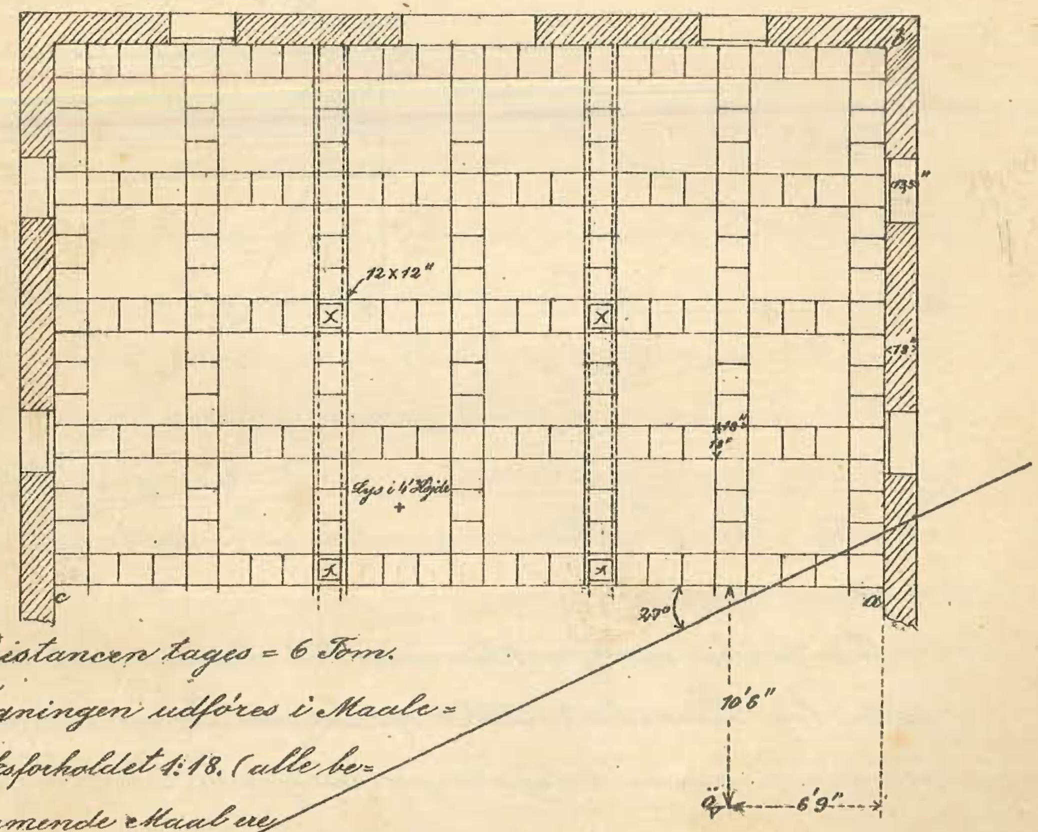
1ste Februar 1901

I Stedet for Nr. 29, 30, og 33 i den Udgave, tegnedes 1900, de tre her indf Numre af en ældre Udgave.

ningspunkt og Spor for Linien $t' t_v$).

No. 29. Perspektivisk Afbildning.





Distancen tages = 6 Fom.

Tegningen udføres i Maalestoksforholdet 1:18. (alle bestemmende Maal ere paaskrevne).

Fig. 1
(Anskuelighedsfigur)

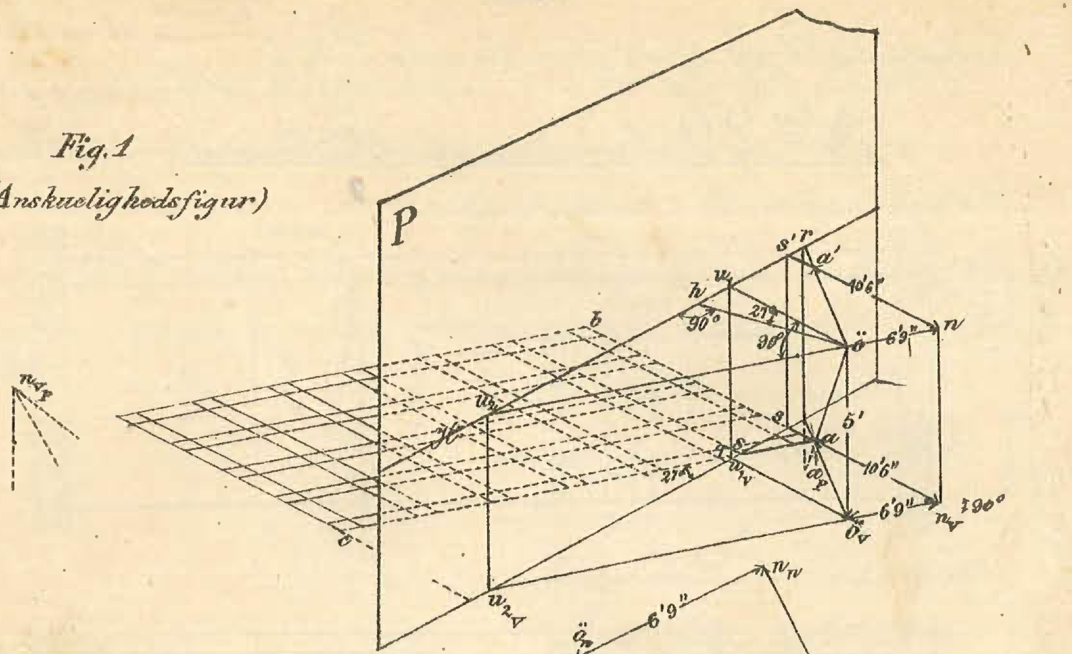
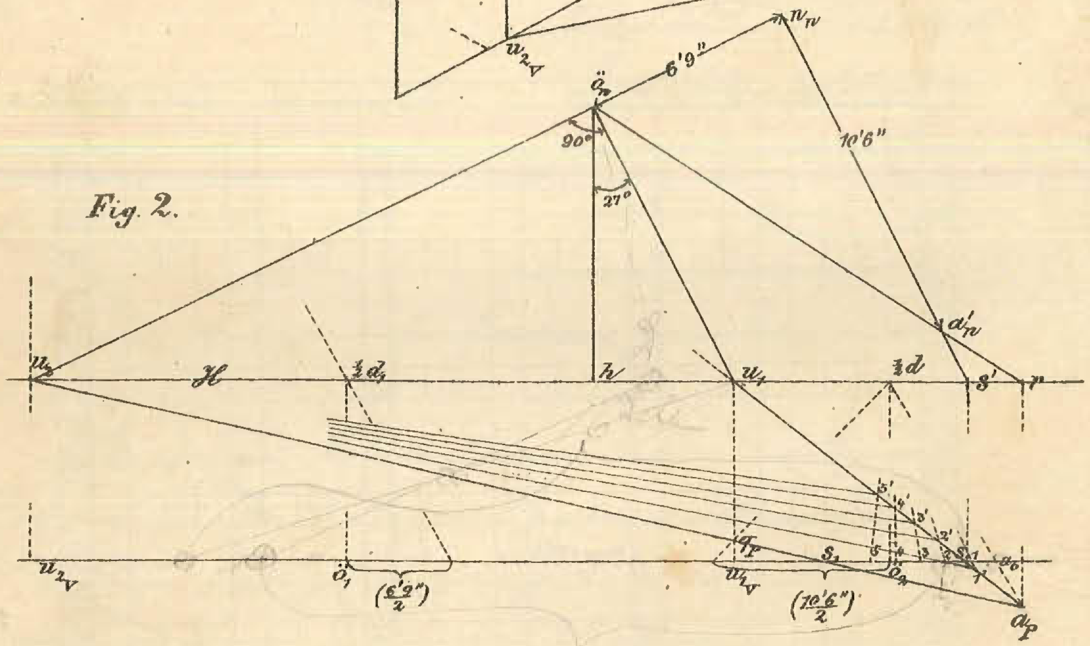


Fig. 2.



Vi tænke os Genstanden (et Pakhusrum i ⅛ af naturlig Størrelse) stillet op foran Perspektivplanen i den paa Fortegningen angivne Stilling.

Vi begynde nu med at afsatte Hovedpunktet h og Horizontlinien H samt den vandrette Linie, hvori Gulvets Plan skærer Perspektivplanen, denne Linie er parallel med H og ligger i en Afstand af 5 Fod (maalt paa en Maalestok i Forholdet 1:18) under den. For dernæst at konstruere Retningspunkterne u_1 og u_2, henholdsvis for Liniër parallele med ab og ac nedlægge vi Planen gennem ö og H ($hö_n$ = Distancen = 6 Tom. (i sand Størrelse) og afsatte Vinklerne $hö_n u_1$ og $hö_n u_2$ saaledes som vist.

Det gælder nu om at faa fat i det perspektiviske Billede f. Eks. af Punktet a, dette er i Fig. udført paa to Maader.

1, Ved Hjælp af Fig. 1 indses det let, at a_p, der bestemmes som Sporet for Sestraalen öa maa ligge for det første paa Billedet af Linien ab og for det andet paa en lodret Linie gennem Punktet r, hvilket Punkts Bestemmelse let sker ved Hjælp af Nedlagningen af Planen gennem ö og H. Linien ab's Billede findes, idet dens Retningspunkt er u_1, dens Spor s, hvis Bestemmelse ogsaa let vil forstaas ved Sammenligning af de to Figurer.

2, Vi kunne bestemme Billederne af Linierne

ab og ac paa følgende Maade, idet Retningspunkterne u_1 og u_2 ere bekendte af det foregaaende. Punktet n_v af ab ligger paa u_{2_V} $ö_V$, hvis perspektiviske Billede er en lodret Linie gennem dens Spor u_{2_V} (Retningspunktet er u_2). Fra $ö_V$, hvis perspektiviske Billede er uendelig fjernt, skulle vi nu afsatte $ö_V n_V = 6'9''$; dette er udført ved Hjælp af Delingspunktet $(\frac{1}{2}d_1)$, $u_2 - (\frac{1}{2}d_1) = \frac{1}{2} u_2 ö_n$, $ö_1$ svarer til det uendeligt fjerne Punkt af $u_2 u_{2_V}$ (Billedet af $ö_V$), Halvdelen af 6'9" er nu afsat som vist i Fig., og ved en Linie gennem $\frac{1}{2}d_1$ bestemmes det perspektiviske Billede n_{V_P} af n_V.

Paa lignende Maade bestemmes Billedet af det Punkt q, hvori $ö_V u_{1_V}$ skærer ac. $ö_V u_{1_V}$ afbildes som Linien $u_1 u_{1_V}$: — Vi ville nu afsætte $ö_V q = 10'6''$ og benytte her Delingspunktet $\frac{1}{2}d$ $((\frac{1}{2}d)u_1 = \frac{1}{2}u_1 ö_n)$, idet $ö_V u_V$ har Sporet u_{1_V} Retningspunktet u_1; fra $ö_2$, der svarer til det uendeligt fjerne Punkt af $u_1 u_{1_V}$ afsættes $\frac{10'6''}{2}$ saaledes som vist, og Punktet q_P bestemmes. $u_2 q_P$ og $u_1 n_{V_P}$ give a_P.

Kende vi nu først Billedet af Linierne ab og ac, ere alle de følgende Konstruktioner bekendte fra de foregaaende Opgaver. For t. Eks. at

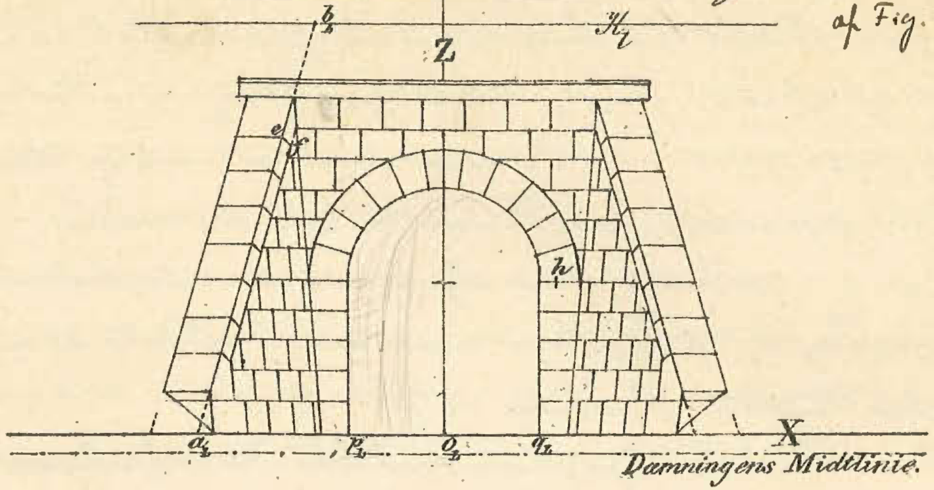
afsætte de 17 lige store Stykker, hver lig 18", ud fra a paa Linien ab benyttes Delingspunktet $\frac{1}{2}d$ (Sporet af ab er s), fra a_0, der svarer til a_P afsættes nu $a_0 1 = 12 = 23 = 34 \cdots\cdots = 9''$ (man benytter nemlig halvt Delingspunkt), ved Linier til $(\frac{1}{2}d)$ bestemmes nu $1', 2', 3' \cdots$ o. s. v. Paa lignende Maade behandles Linien $a_P u_2$ (ac), hvor man skal afsatte 25 lige store Stykker hver lig 18".

Endnu skal kun omtales Konstruktionen af Retningspunkterne for Skraabaandenes Kanter, disse Retningspunkter maa ligge paa Retningslinien $(u_1 u_{1_V})$ for de lodrette Planer, hvori Kanterne ligge, og da disse danne en Vinkel paa 45° med lodrette Linier, indses det let, at Afstanden fra u_1 til Retningspunkterne er lig $u_1 ö = u_1 ö_n$. ——————

Tegnet i
Juleferien 1900–1901

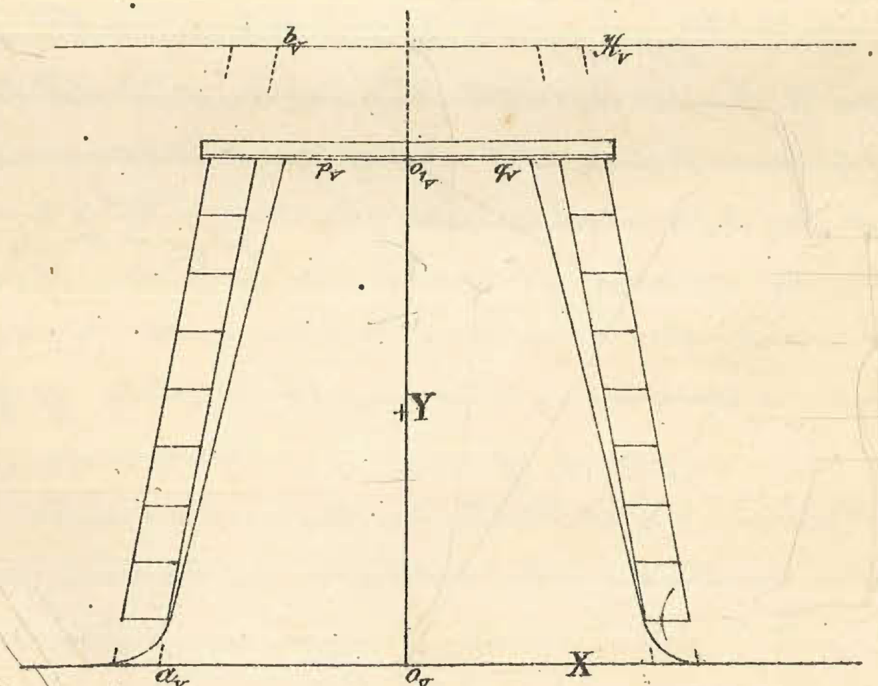
№ 30. Perspektivisk Afbildning.

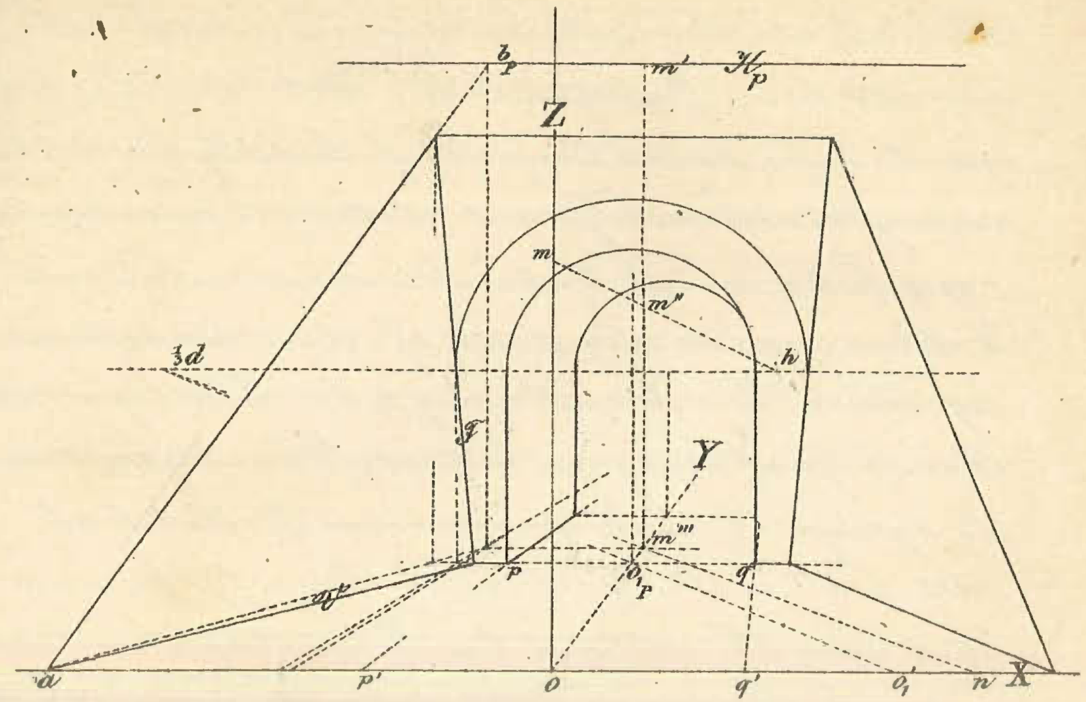
Dobbeltet Maalestok af Fig.



h er Hovedpunktet.

Distancen = 9".





Genstanden, der forestiller Modellen til en Viadukt, er paa Fortegningen fremstillet i halv sand Størrelse, Perspektivplanen falder sammen med **XZ**-Planen i det antydede Koordinatsystem; Øjets Beliggenhed er bestemt ved Distancen og Hovedpunktets lodrette Billede **h**.

I Fig. er nu vist Konstruktionen af en Del af Billedet. Man kan f. Eks. begynde med at finde Billederne af Punkterne p, o_1 og q, dette gøres ved at afsætte $o\,o_1' = \frac{2}{3}\,o_v\,o_{1v}$ (dig $\frac{2}{3}$ af $o_v\,o_{1v}$'s sande Størrelse) og trække Linien til $\frac{1}{3}d$ ($(h - \frac{1}{3}d) = 3$ Tom=

$\frac{1}{3}$ Distance; ved Konstruktionen gör man bedst i at anvende „halvt Delingspunkt“, idet man da bruger de halve sande Længder af Liniestykkerne; her er benyttet $\frac{1}{3}d$ paa Grund af Mangel paa Plads); p og q bestemmes ved Hjälp af Linier parallele med Y-Aksen gennem p' og q', op' og oq' ere henholdsvis lig sand Störrelse af o_1p og o_1q. Paa lignende Maade gaar man nu videre; Dæmningens överste synlige Kant K finder man Billedet af, idet om''' er Billedet af et Liniestykke saa stort som K's Afstand fra Perspektivplanen (on = $\frac{1}{3}$ af dette Stykke), om = K's halve Höjde over XY-Planen og m'm'' = m''m'''. Linien a b bestemmes let, da den ligger i Skraaningens Plan, dens Retningspunkt, hvorigennem Billederne af de med den parallele Linier gaa, findes paa Retningslinien for Planen F.V', denne Retningslinie er parallel med F og gaar gennem det Punkt, hvor V' skærer Horizontlinien. Endnu skal kun tilföjes, at Linien ef (se Fortegningen) og de dermed parallele bestemmes saaledes, at de dels ligge i Planen V.F. (deres Retningspunkt altsaa paa denne Plans Retningslinie), dels i Planer vinkelrette paa a b;

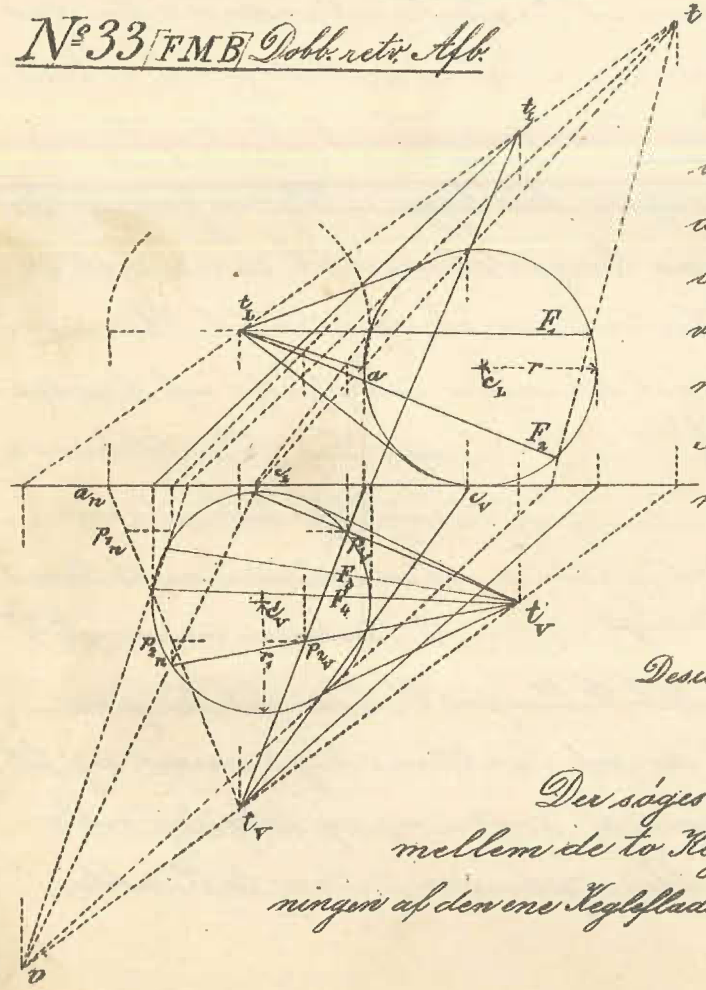
disse Planers Retningslinie bestemmes, idet vi kende Retningspunktet for a b, ved fölgende bekendte Sætning: <u>naar en Linie staar vinkelret paa en Plan, da er Forbindelseslinien mellem Liniens Retningspunkt og Hovedpunktet vinkelret paa Planens Retningslinie, og Distancen er mellemproportional mellem Afstandene fra Hovedpunktet til Liniens og Planens Retninger.</u> (Retningspunkt og Retningslinie).

---

gerne. Alle Hjælpeplaner komme altsaa til at indeholde Linien **bv**, og deres vandrette Spor danne et Liniebundt med v som Toppunkt; hver saadan Hjælpeplan giver i Almindelighed fire Punkter, (i Fig er vist Konstruktionen af Punkterne paa en af Cylinderens Omridsfrembringere).

Bliver en af Hjælpeplanerne Tangentplan til det ene Legeme, skærer den det andet i to Frembringere, der ere Tangenter til den søgte Kurve (cfr. næste Opgave).

№33 [FMB] Dobb. retv. Afb.



Dobbelt Maalestok af denne Tegning. eller: c

To Keglesnitskegler, hvis Grundflader ere Cirkler beliggende henholdsvis i L og V, ere givne ved følgende Punkters Koordinater: t: 26,5, 85, 41 c
c: 90, 0, 31

t': 100, 31, 93,5
c': 30, 31, 0

Desuden er givet:
$r = 31$
$r_1 = 29$

Der søges Skæringskurven mellem de to Kegler samt Udfoldningen af den ene Keglflade med Skæringskurven.

For at löse denne Opgave overskærer man begge Kegler med Planer gennem deres Toppunkter, en vilkaarlig af disse Planer vil nemlig skære hver af Keglerne i to Frembringere, og de fire Frembringere bestemme ialt fire Punkter af Skæringskurven. Hjælpeplanernes Spor gaa naturligvis gennem Toppunktlinjens tilsvarende Spor.

I Fig. er vist, hvorledes man konstruerer Punkterne p_1 og p_2 paa en af Konturfrembringerne for den ene Kegle. Foruden Konturfrembringerne behandles ogsaa specielt Frembringerne F_1, F_2, F_3 og F_4; disse fire Frembringere, der ligge i Planer gennem Toppunktslinien, som ere Tangentplaner til den ene eller den anden af Keglerne, ere Tangenter til Skæringskurven. Dette vil let indses ved Hjælp af hosstaaende

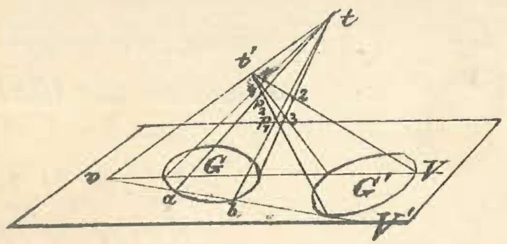
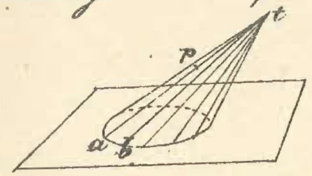


Fig., Punkterne 1, 2, 3 og 4 ere bestemte ved Hjælpeplanen med Sporet V, tænke vi os nu at V drejer sig om o indtil Stillingen V', hvor det tangerer Grundfladen G', da vil Punkterne 2 og 3 nærme sig til at falde sammen i p_1, 1 og 4 i p_2, og fölgelig ville t.a og t.b tangere Skæringskurven i disse to Punkter.

(Ligge et af Toppunkterne t og t_1 eller begge uendelig fjernt, blive Keglerne henholdsvis til Kegle og Cylinder og to Cylindre, det samme gælder altsaa disse).

For at udfolde Keglen (i Fig. den med Toppunkt i t) betragte vi den (paa lignende Maade som Cylinderen i Opgave № 32) som en Pyramide med uendelig mange Kanter, vi skære den nu op langs en Frembringer

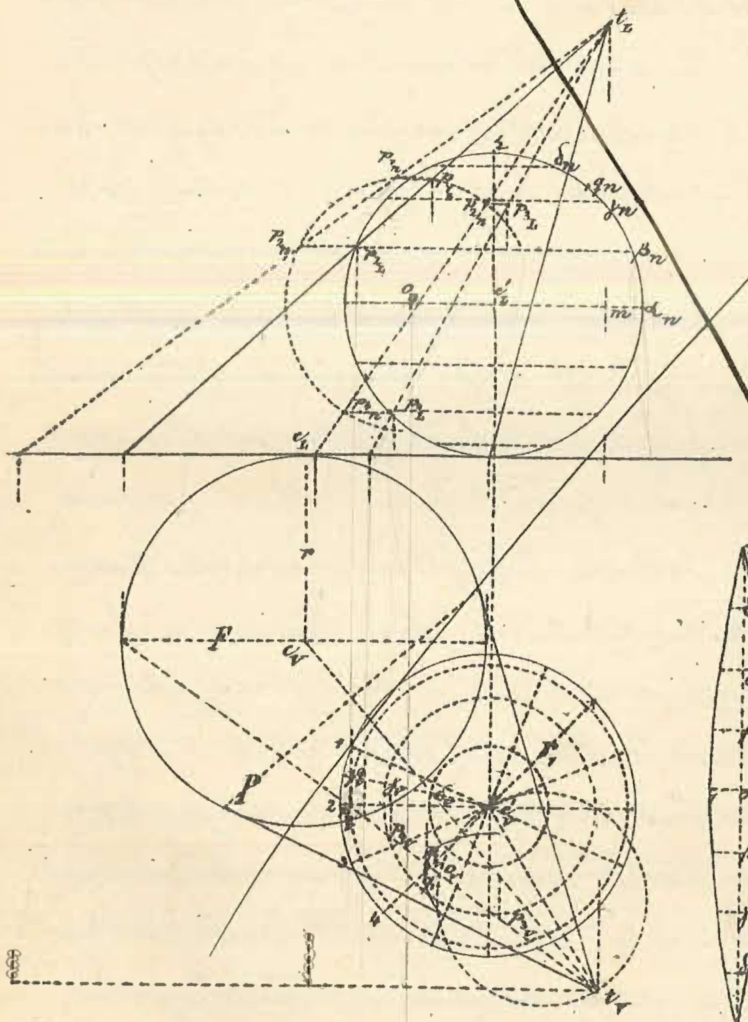


og dreje efterhaanden de enkelte Fladeelementer om de konsekutive Frembringere ind i en og samme Plan.

I Praksis maa vi erstatte de uendelig smalle Elementer med Elementer af uendelig Bredde, det bliver altsaa kun en (ganske vist i praktiske Anvendelser tilstrækkelig nöjagtig) Tilnærmelse, vi faa med at göre.

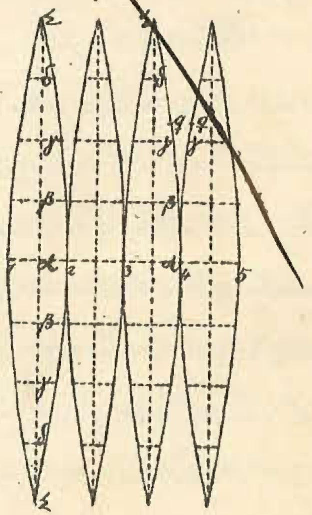
Vi betragte altsaa Keglefladen som bestaaende af de smaa Trekanter t a a_1 (hvor Buen a a_1 er erstattet af Korden), a a_1 haves i den foreliggende Opgave straks i sand Störelse, desuden er i Fig. vist, hvorledes vi, ved at dreje en Frembringer t a ned i en vandret Plan gennem Toppunktet, i vandret Billede faa den at se i sand Störrelse tillige med Stykkerne t p_1 og t p_2 af den. — Vi benytte ved Udfoldningen naturligvis saa vidt muligt kun de Frembringere, der ere brugte ved Konstruktionen af Skaringskurven; men hvis Stykkerne a a, blive saa store, at vi ikke nöjagtigt nok kunne sætte Korden i Stedet for Buen, maa vi dele dem.

№34 [FMB] Dobb. retv. Afb.



Givet en skav Kegle ved: t: 80, 125½, 126½
c: 0, 47½, 0
r = 47½
og en Kugle ved: c_1: 50½, 92½, 40
r_1 = 40

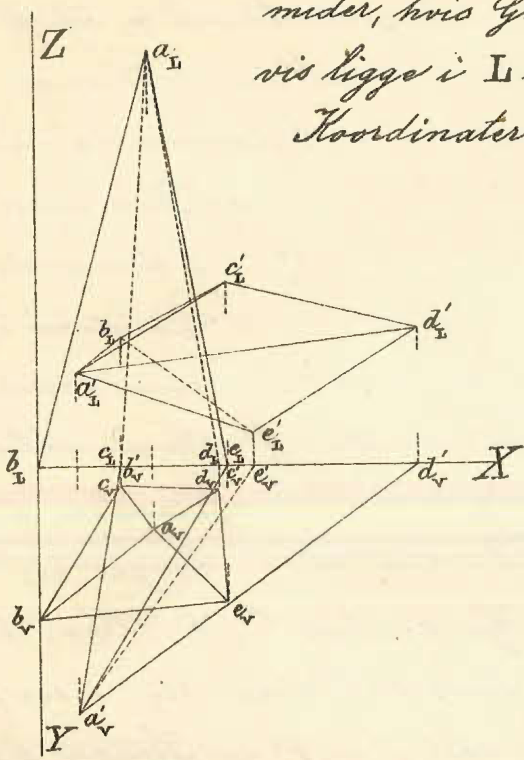
Skaringskurven mellem Kuglen og Keglen söges; Kuglen udfoldes



Tegningen udföres i dobbelt Maalestok af Fortegningen.

№30 [M.B] Aksonometrisk Afbildning.

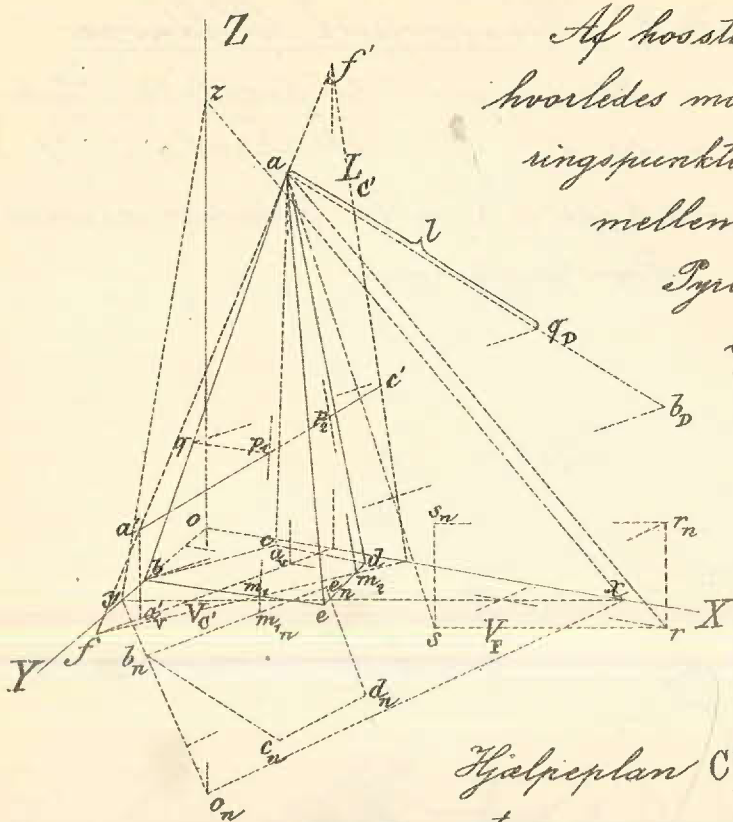
Der er givet to firsidede Pyramider, hvis Grundflader henholdsvis ligge i L og V. Hjörnespidsernes Koordinater ere:



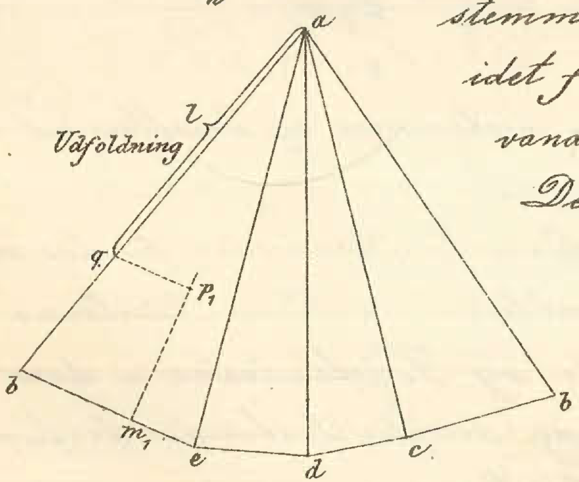
	x	y	z
a:			
b:			
c:			
d:			
e:			
a':			
b':			
c':			
d':			
e':			

Skaringslinien bestemmes og derefter udfoldes den ene Pyramide.

Skaringen mellem to Pyramider findes ved at söge Skaringspunkterne mellem Kanterne i den ene Pyramide og Sidefladerne i den anden og omvendt og derefter forbinde de fundne Punkter paa rette Maade.



Af hosstaaende Fig. ses, hvorledes man finder Skæringspunkterne p_1 og p_2 mellem den ene Pyramide a-bcde og Kanten a'c' i den anden. Gennem Pyramidernes Toppunkter og Kanten a'c' lægges en Hjælpeplan C', hvis Spor bestemmes, som Fig. viser, idet f og f' ere Linien a a''s vandrette og lodrette Spor. De Frembringere am_1 og am_2', i hvilke Hjælpeplanen skærer Pyramiden, bestemme da de sögte Skæringspunkter p_1 og p_2 paa a'c'.



Saaledes fortsættes, til man har fundet alle Skæringspunkterne mellem hver enkelt Kant og den Pyramide, som Kanten ikke tilhörer.

Hvorledes de fundne Punkter skulle forbindes, kan afgöres paa lignende Maade som i Opg. № 16, hvortil derfor henvises.

Udfoldningen af en Pyramide kan tænkes fremkommen ved, at Pyramiden er skaaret op langs en Kant og de enkelte Sideflader efterhaanden drejede om Kanterne ind i en og samme Plan. Formaalet med en saadan Udfoldning er at faa Sidefladerne med de deri liggende Figurer at se i sand Störrelse.

Da Sidefladerne ere Trekanter, kan Pyramiden a-bcde's Udfoldning tegnes, saasnart man kender de sande Længder af alle Pyramidens Kanter. Grundfladens sande Figur bestemmes ved Nedlægning saaledes, som Fig. viser; for de övrige Kanters Vedkommende findes de sande Længder ved at dreje Kanterne om en Frontlinie a s ind i den Frontplan F, der indeholder a. Herved vil f. Eks. △ a b s (hvor s er Drejningsaksens vandrette Spor, se nedenfor / vise sig i sand Störrelse som △ $ab_D s$. Punktet b beskriver en Cirkel, der afbildes som den rette Linie $bb_D \perp as$; et andet geometrisk Sted for b_D faas ved, at man kender Afstanden sb_D, som indses at være lig $s_n b_n$, idet s_n er Nedlægningen af s.

Punktet s er konstrueret saaledes: Frontlinien $ar \# zx$ har har det vandrette Billede $a_v r \# x$-Aksen; herved er r bestemt. Gennem r er Frontplanen F's vandrette Spor V_F tegnet parallelt med xy til Skæring med Drejningsaksen i et Punkt, som, da Drejningsaksen ligger i F, netop er dens vandrette Spor s.

Fig. viser endvidere, hvorledes Punktet p_1 overföres til Udfoldningen. I Hovedfiguren findes först m_1's Nedlægning m_{1n} og Linierne $p_1 q \# m_1 b$ og $qq_D \perp as$ tegnes; $aq_D = l$ er da sand Længde af aq. Derefter bestemmes Linien am_1's Plads i Udfoldningen ved Hjælp af den fra Nedlægningen bekendte Afstand bm_1, og p_1 findes nu ved $aq = l$ og $qp_1 \# bm_1$.

 Dobbelte af Forkyrs.

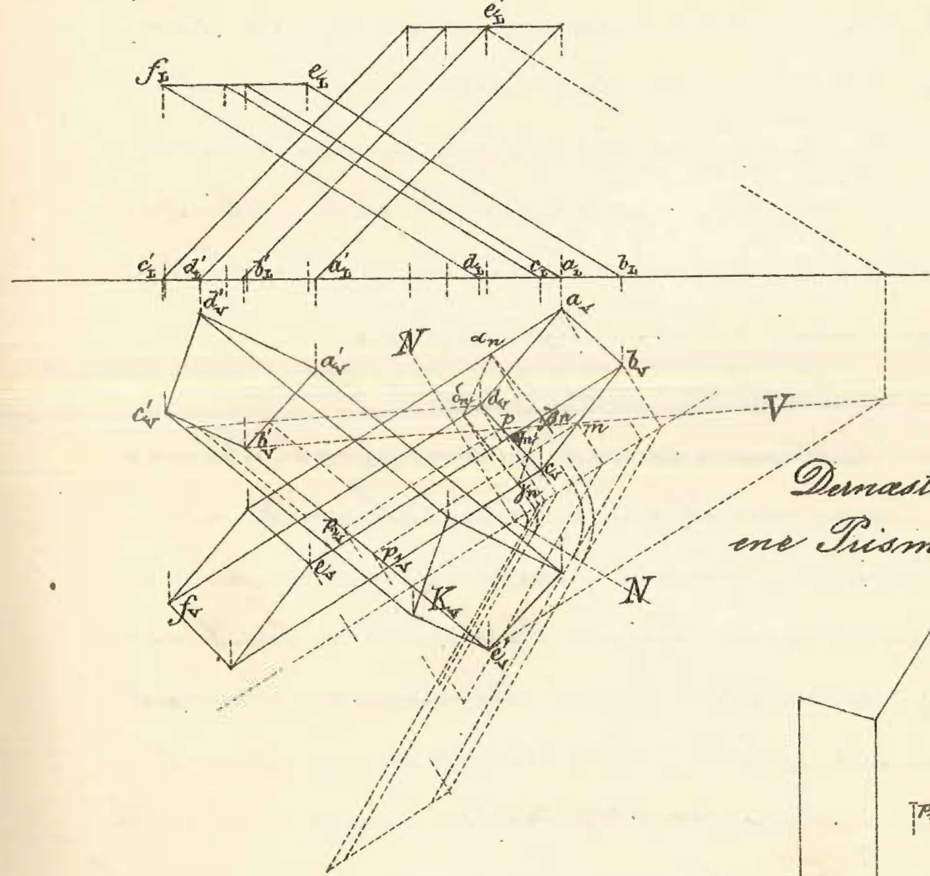
№ 31 [F.M.B.] Dobb. retv. Afb.

Der söges Skæringslinien mellem to skæve Prismer; disse ere givne ved Koordinaterne for fölgende Punkter:

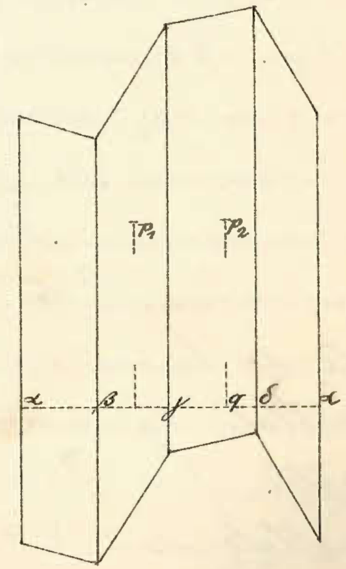
a:
b:
c:
d:

a':
b':
c':
d':

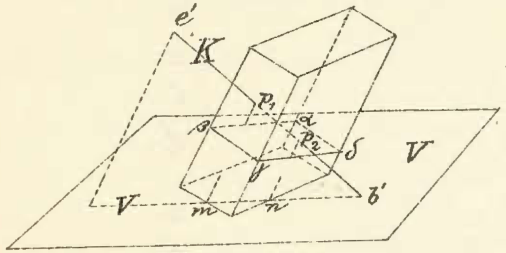
e:
e':



Dernæst udfoldes det ene Prisme.



Skæringskurven mellem de to Prismer kan findes enten ved at söge Skæringspunkterne mellem Kanterne i det ene Prisme og Sidefladerne i det andet og omvendt, eller ved at söge Skæringslinierne mellem de forskellige Sideflader.



I Fig. er vist Konstruktionen af de Punkter, hvori Kanterne $b'e'$ og df skære det Prisme, hvortil de ikke selv höre.

Man lægger gennem den betragtede Kant K (sammenlign. med Anskuelighedsfig.) en Plan parallel med Kanterne i det andet Prisme; denne Plan bestemmes ved gennem et Punkt e' af K at lægge en Linie parallel med det omtalte Prismes Kanter, saaledes som vist i Fig. Hjælpeplanen skærer Prismet i to Linier mp_1 og np_2 parallele med Kanterne; herved bestemmes de sögte Punkter p_1 og p_2 paa K. Paa samme Maade behandler man nu alle de andre Kanter i begge Prismer, men da alle de herved nödvendige Hjælpeplaner er parallele, og man kun anvender deres vandrette Spor, kan man straks tegne disse parallele med V (se f. Eks. Konstruktionen af

Punkterne paa df).

For at forbinde de fundne Punkter paa rette Maade gaar man frem som angivet i Opgave № 16.

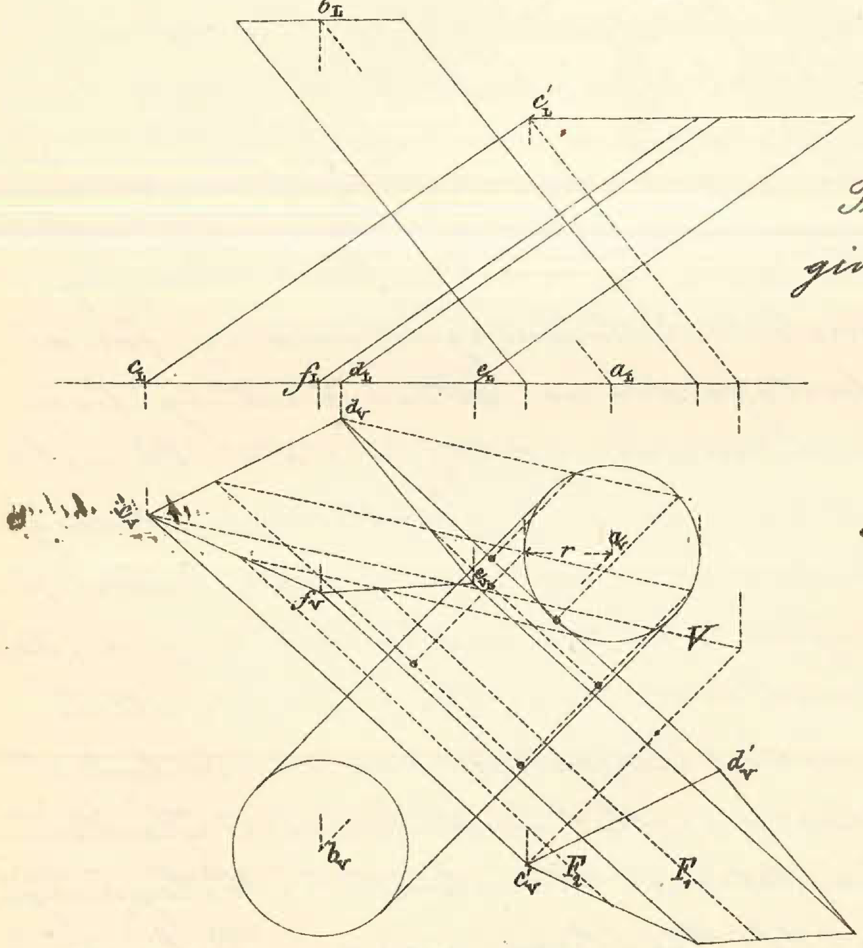
Et Prisme kan ligesom en Pyramide udfoldes ved at skære det op langs en Kant og efterhaanden dreje de enkelte Sideflader om Kanterne ind i samme Plan. Herved vil et vilkaarligt Normalsnit N (der skærer Prismet i Firkanten $\alpha\beta\gamma\delta$) udfoldes som en ret Linie vinkelret paa Prismekanterne. Da alt, hvad der ligger i Prismets Overflade, viser sig i sand Störrelse i Udfoldningen, maa vi, for at kunne foretage denne, altsaa först og fremmest kende Siderne $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, o.s.v. i Normalsnittet; disse ere i Fig. fundne ved Nedlægning. Kanterne vise sig som ovenfor nævnt i Udfoldningen vinkelret paa Linien $\alpha\beta\gamma\delta\alpha$, deres Endepunkters Afstande fra Normalsnittets Plan findes ved Projektion paa en ny lodret Billedplan, parallel med Prismets Kanter (ogsaa benyttet ved Normalsnittets Nedlægning). Hvorledes f. Eks. Punkterne p_1 og p_2's Beliggen=

hed i Udfoldningen findes indses let ved Figurens Hjælp.

№ 31 a [F] Dobb. retv. Afb.

Dobbelt

Der er givet en skæv Cylinder og et skævt Prisme; søg deres Skæringslinie; Cylinderen, hvis Spor i V er en Cirkel, er givet ved:



a: ~~(40, 32, 0)~~

b: ~~(127, 32, 0)~~

r:

Prismet er givet ved:

c:

d:

e:

f:

c':

Denne Opgave løses paa samme Maade som № 31, idet man betragter Cylinderen som et Prisme med uendelig mange Kanter. For at tegne Skæringskurven vælger man et passende Antal Frembringere paa Cylinderen og finder disses Skæringspunkter med Prismet. Specielt maa naturligvis søges Punkterne paa alle Cylinderens Omridsfrembringere, samt de Punkter, hvori Prismekanterne skære Cylinderen. I Fig. er vist Konstruktion af Punkterne paa Kanten d d' og paa den ene af Cylinderens Omridsfrembringere. Linierne T_1 og T_2, der ligge i en Hjælpeplan, der bliver Tangentplan til Cylinderen, ere Tangenter til den søgte Kurve. Hver Sideflade i Prismet skærer naturligvis Cylinderen i et Keglesnit, og de to Legemers Skæringskurve kommer derfor til at bestaa af Dele af disse Keglesnit, som støde sammen i Punkterne paa Prismets Kanter.

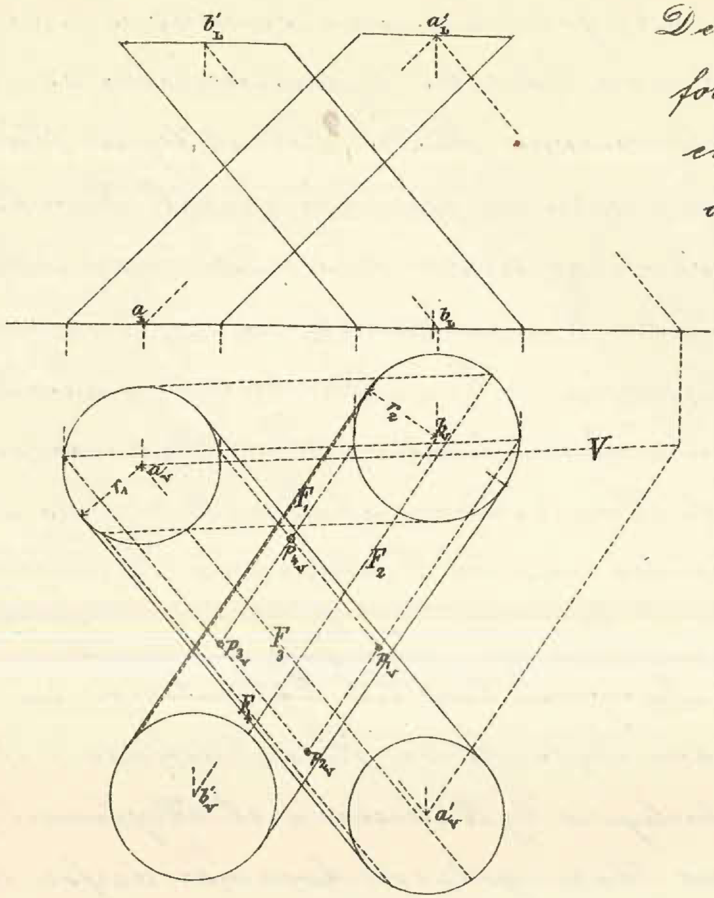
№ 32 [FMB] Dobb. retv. Afb.

Dobbelt Maalestok af Fortegn.

Der søges Skæringskurven mellem to skævtstaaende Cylindre, hvis vandrette Spor ere Cirkler; de to Cylindre ere givne ved følgende Punkter:

eller	a: (40, 32, 0)	a': (104, 83,5, 64,5)	r_1: 21
	b: (127, 32, 0)	b': (38, 83, 50)	r_2: 19

Dernæst udfoldes den ene Cylinderflade.



Fremgangsmaaden er her ganske den samme som i Opgave № 31, idet hver Cylinder kan betragtes som et Prisme, hvis Sidefladers Antal er vokset i det uendelige, samtidig med at deres ene Dimension er aftaget i det uendelige. Enhver vilkaarlig valgt Frembringer bliver altsaa at betragte som en Kant i Prismet, og for at konstruere Skaringskurven, vælger man sig et passende

Antal Frembringere; först og fremmest konstrueres naturligvis de Punkter, som ligge paa Konturfrembringerne samt paa Frembringerne F_1, F_2, F_3 og F_4 (disse fire sidste Frembringere ere Tangenter til Skaringskurven cfr. Opg. 33a). I Fig. er vist Konstruktionen af V (Retningen for Hjælpeplanernes vandrette Spor) og desuden er der af Skaringskurven fundet de fire Punkter p_1, p_2, p_3, og p_4, hvoraf p_1 og p_2 ligge paa en Konturfrembringer.

Udfoldningen af en af Cylindrene konstrueres med Tilnærmelse, idet man betragter det Stykke af Normalsnittet, der ligger mellem to paa hinanden fölgende af de Frembringere, der ere anvendte ved Konstruktionen, som retlinet og for Resten gaar frem som ved Prismet; bliver et saadant Stykke af Normalsnittet saa stort, at man ikke nöjagtigt nok kan sætte Korden i Stedet for Buen, maa man dele det i to eller flere Stykker.

Dobbelt.

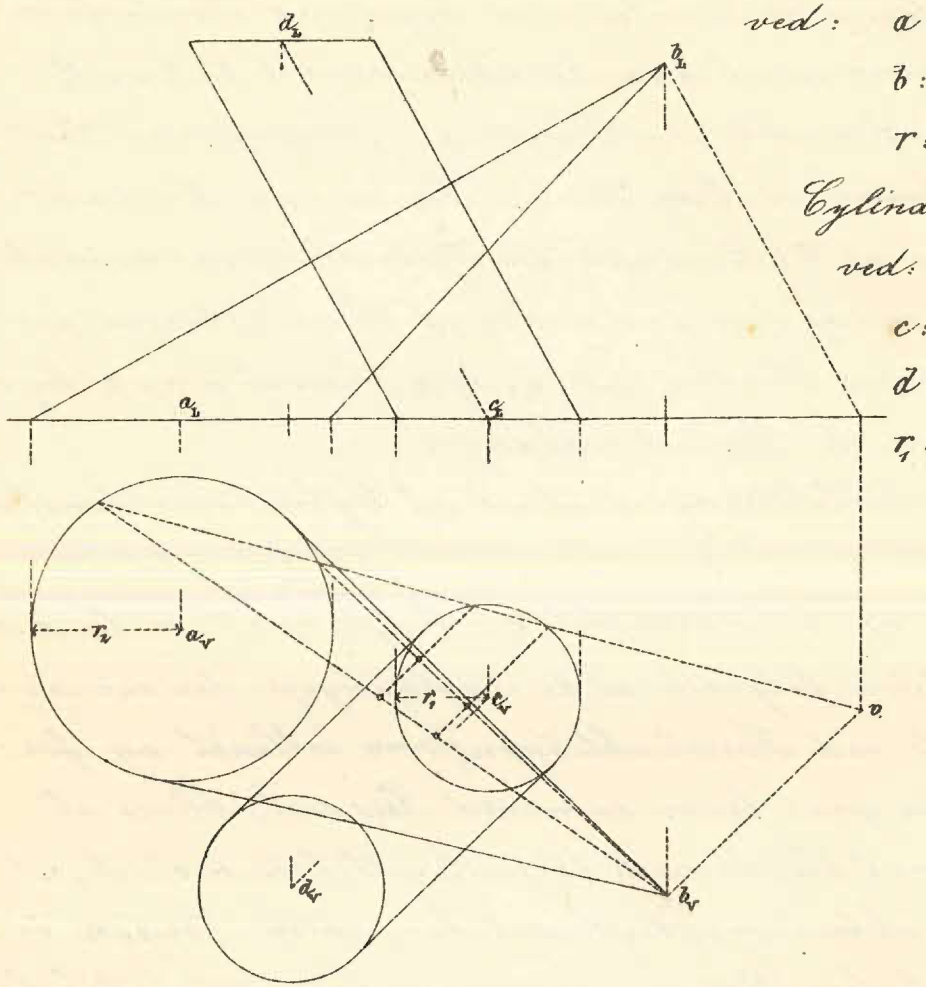
№ 32 a [F] Dobb. retv. Afb.

Der er givet en skav Kegle og en skav Cylinder, hvis Spor i V ere Cirkler; sög deres

Skæringskurve:

Keglen er givet ved: a: b: r:

Cylinderen ved: c: d: r_1:



Vi lægge her ligesom i forrige Opgaver Hjælpeplaner, der skære begge Legemer i Frembringere.

For at en Plan her skal kunne göre dette, maa den baade gaa gennem Keglens Top=

punkt og være parallel med Cylinderfrembringerne. Alle Hjælpeplaner komme altsaa til at indeholde Linien bo, og deres vandrette Spor danne et Liniebundt med o som Toppunkt; hver saadan Hjælpeplan giver i Almindelighed fire Punkter, (i Fig. ~~er vist Konstruktionen af Punkterne paa en af Cylinderens Omridsfrembringere~~).

Bliver en af Hjælpeplanerne Tangentplan til det ene Legeme, skærer den det andet i to Frembringere, der ere Tangenter til den sögte Kurve (cfr. Opg. 33 a).

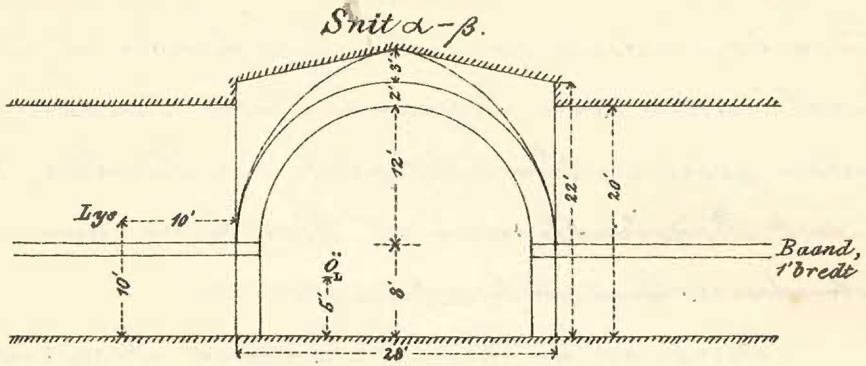
№ 33 [MB] Persp. Afb.

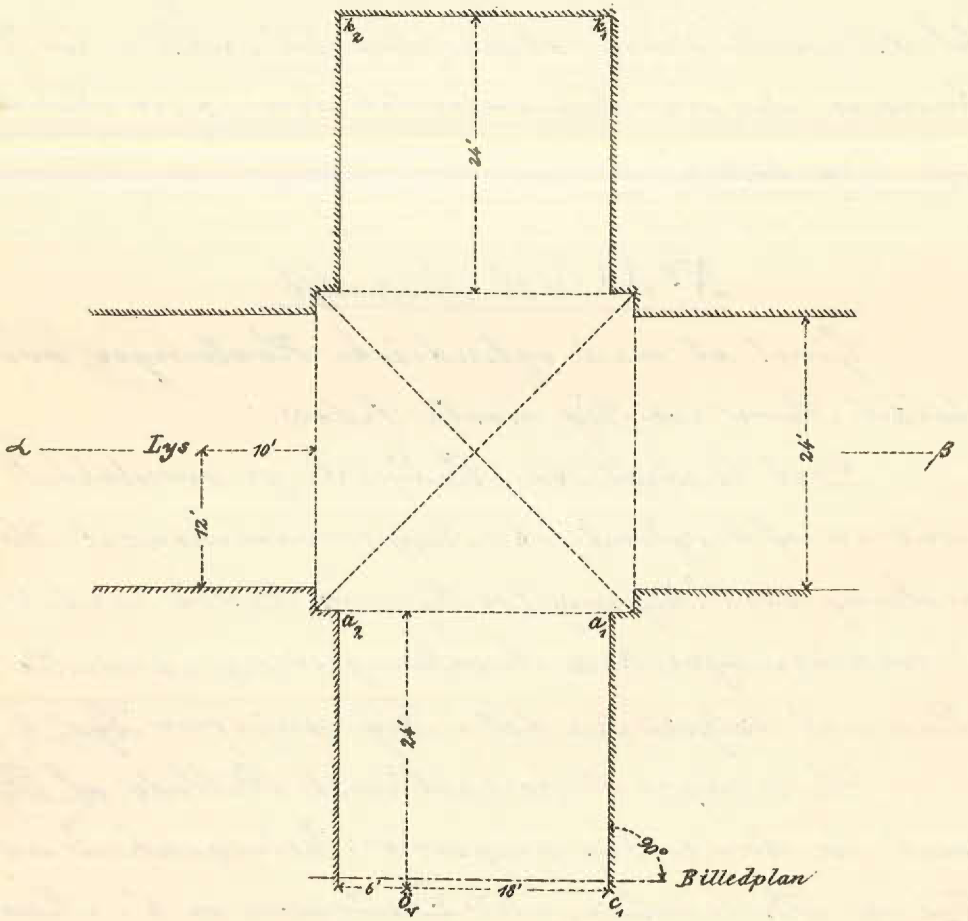
Givet et med cylindriske Hvælvinger overdækket Rum (se Fig. næste Side).

Det kvadratiske Midtparti er overdækket med en af 4 cylindriske Kapper sammensat Korshvælving med Stigning (se Fig.) og Resten med 4 Töndehvælvinger, hvis Frembringere ere vandrette. Rummet belyses fra det i Fig. angivne Lys.

Der söges et perspektivisk Billede af Rummet for den i Fig. angivne Beliggenhed af Öje og Billedplan, idet Distancen er 6". Maale=

Snit α-β.



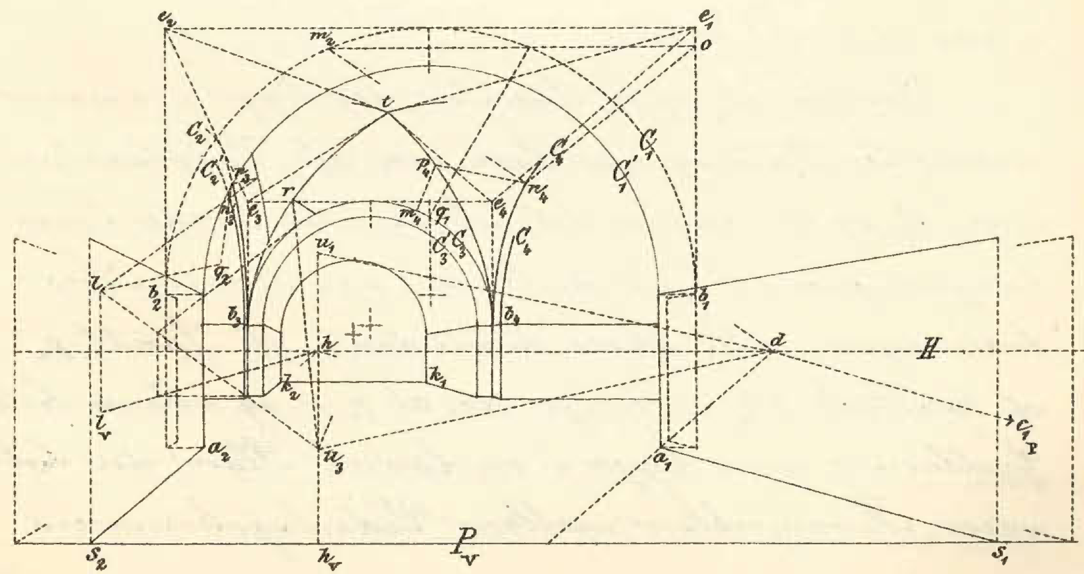


stoksforholdet tages lig $\frac{1}{24}$.

Vi afsatte paa sædvanlig Maade (se Fig) Hovedpunktet h, Horizontlinien H, samt den vandrette Gulvplan V's perspektiviske Spor P_v. Derefter finde vi Linierne k_1a_1 og k_2a_2's Spor s_1 og s_2 ved $h_v s_1 = 18'$ og $h_v s_2 = 6'$ og tegne Liniernes Billeder gennem Hovedpunktet.

Det perspektiviske Billede af f. Eks. Punktet a_1 kan nu findes ved Hjælp af Delingspunktet d (hd = Distancen), idet Afstanden a_1c_1 er 24' (iflg. Fortegningen). Da c_1 afbildes uendelig fjernt, bliver $d\,c_{1p} \neq h s_1$.

Hvorledes de rette Linier, der begrænse Vægflader-



ne, samt de i Frontplaner beliggende Halvcirkelbuer nu kunne tegnes, er bekendt fra det foregaaende. De Buer, hvis Planer ere vinkelrette paa Billedplanen, konstrueres ved at dreje Buerne C_1 og C_1' 90°, henholdsvis om de lodrette Linier b_1c_1 og b_2c_2. Exempelvis vil et vilkaarligt Punkt m_2 af C_1 ved Drejningen om b_1c_1 beskrive en Cirkel, hvis Centrum er o, og falde i et Punkt n_4 af C_4, hvilket Punkt findes som Skæringspunkt mellem Linierne oh og m_2d. Paa denne Maade drejes et tilstrækkeligt Antal Punkter; det anbefales at bruge de Punkter af C_1, der dele denne Bue i 16 lige store Dele, samt de Punkter af C_1', som ligge paa Linier fra Delingspunkterne paa C_1 til et Punkt q_1, hvis Bestemmelse senere (Side 122) omtales.

Ere nu m_4 og n_4 Punkter, der ligge i samme vandrette Plan og paa hver sin af „Vederlagslinierne" C_3 og C_4, indses det, at de tilsvarende Frembringere paa de Cylinderflader, der danne Korshvælvingen, ville skære hinanden i et Punkt p_4 af Gratbuen tb_4. Tillige ses, at p_4 — og altsaa hele Gratbuen — maa ligge i en lodret Plan, der halverer Rumvinklen mellem Vederlagsliniernes

Planer. Gratbuerne ere derfor Ellipsebuer.

For at kunne tegne Frembringerne maa vi först konstruere deres Retningspunkter. Frembringerne ligge i lodrette Planer, der henholdsvis ere parallele med og vinkelrette paa Billedplanen, og de have en Stigning af 3 : 14. Hvis vi derfor tegne de to Linier du_1 og du_3 saaledes, at tg. $hdu_1 = hdu_3 = \frac{3}{14}$, kan Frembringeren n_4p_4 tegnes parallel med du_1, medens m_4p_4 faar u_3 til Retningspunkt (cfr. Opg. 29). Tangenterne til Gratbuerne i Hvælvingens Toppunkt t ere de fire Linier te_1, te_2, te_3, te_4, idet e_1, e_2 .... ligge i Höjde med Vederlagsliniernes överste Punkter; thi betragte vi f. Eks. Gratbuen tb_4, vil dens Tangent i t være Skæringslinien mellem Tangentplanerne langs de överste Frembringere paa Cylinderfladerne tC_3 og tC_4, hvilken Skæringslinie netop er te_4.

Ved Skyggekonstruktionen benytte vi os af, at et Punkt p's Skygge paa en Kegle kan findes som Skæringspunktet mellem Lysstraalen gennem p og en af de Frembringere, i hvilke Keglen skæres af en Plan gennem dens Toppunkt og Lysstraalen. Denne Methode kan ogsaa anvendes, naar Toppunktet fjerner sig i det uen=

selige, saa at Keglen bliver til en Cylinder.

Naar vi f. Eks. ville finde Cirklen C_2'''s Skygge paa Cylinderfladen tC_2, skulle vi bruge Hjælpeplaner gennem Lyspunktet l, parallele med Cylinderens Frembringere. Disse Planer indeholde alle en Linie lq_2, parallel med de nævnte Frembringere, og deres Spor i C_2's Plan gaa alle gennem denne Linies Spor i samme Plan (q_2). Punktet n_3''s Skygge n_5 findes da som Skæringspunktet mellem Lysstraalen ln_3' og Frembringeren gennem n_3, som er det Punkt, i hvilket Buen C_2 skæres af Linien $q_2 n_3'$. — De sammenhörende Punkter n_3 og n_3' haves allerede, naar vi bestemme det Side 120 omtalte Punkt q_1, som det Punkt i C_1's Plan, der ved Drejning om $b_2 e_2$ falder i q_2. —

De övrige Skygger konstrueres efter samme Regel, naar ikke en simplere Methode kan anvendes. Her skal derfor endnu kun nævnes, hvorledes man kan finde det Punkt r, hvor Gratbuen tb_3's Skygge paa Fladen tC_3 begynder. Denne Skygge kan tænkes fundet ved Skæring mellem Cylinderfladen tC_3 og en Kegleflade, der har l til Toppunkt og Buen tb_3 til Ledekurve. Tangenterne

i Punktet r til de to Kurver (Gratbuen og dens Skygge) bestemme da en Plan, som maa være Tangentplan til begge de sidstnævnte Flader og altsaa indeholde l. Punktet r ligger derfor paa den Frembringer, i hvilken Fladen tC_3 röres af en Tangentplan gennem Lyspunktet l, og kan derved konstrueres.

Analoge Konstruktioner finde Anvendelse ved de to Töndehvælvinger, hvorpaa der falder Skygge.

Nº 33 a [F] Dobb. retv. Afb.

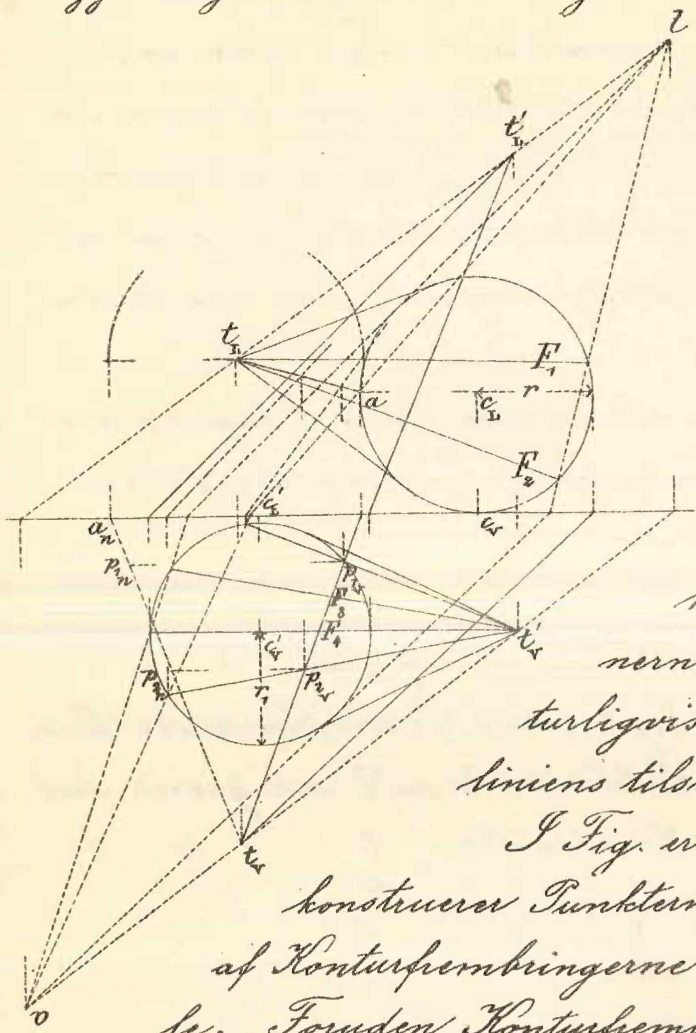
To Keglesnitskegler, hvis Grundflader ere Cirkler beliggende henholdsvis i L og V ere givne ved fölgende Punkters Koordinater: t:
c:
t':
c':

Desuden er givet: $r =$
$r_1 =$

Der söges Skæringskurven mellem de to Kegler samt Udfoldningen af den ene Kegleflade med Skæringskurven.

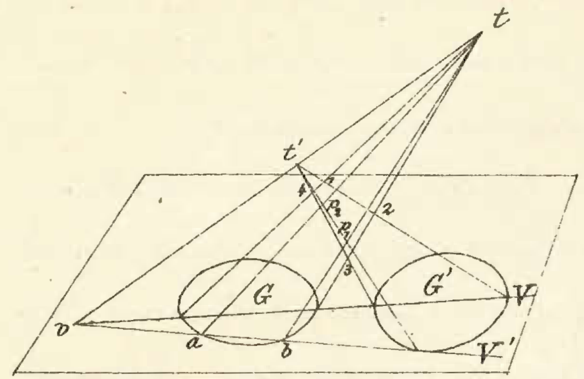
For at löse denne Opgave overskærer man

begge Kegler med Planer gennem deres Toppunkter; en vilkaarlig af disse Planer vil nemlig skære hver af Keglerne i to Frembringere, og de fire Frembringere bestemme ialt fire Punkter af Skæringskurven. Hjælpeplanernes Spor gaa naturligvis gennem Toppunktliniens tilsvarende Spor.



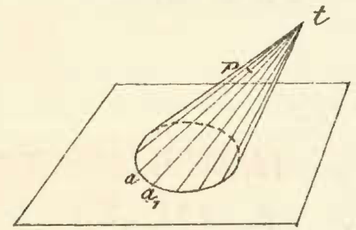
I Fig. er vist, hvorledes man konstruerer Punkterne p_1 og p_2 paa en af Konturfrembringerne for den ene Kegle. Foruden Konturfrembringerne behandles ogsaa specielt Frembringerne F_1, F_2, F_3 og F_4; disse fire Frembringere, der ligge i Planer gennem Toppunktslinien, som ere Tangentplaner til den ene eller den anden af Keglerne, ere Tangenter til Skæringskurven. Dette vil let indses ved

Hjælp af hosstaaende Fig., Punkterne 1, 2, 3 og 4 ere bestemte ved Hjælpeplanen med Sporet V; tænke vi os nu at V drejer sig om o indtil Stillingen V', hvor det tangerer Grundfladen G', da vil



Punkterne 2 og 3 nærme sig til at falde sammen i p_1, 1 og 4 i p_2, og følgelig ville ta og tb tangere Skæringskurven i disse to Punkter. (Ligge et af Toppunkterne t og t_1 eller begge uendelig fjernt, blive Keglerne henholdsvis til Kegle og Cylinder og to Cylindre, det samme gælder altsaa disse).

For at udfolde Keglen (i Fig. den med Toppunkt i t) betragte vi den (paa lignende Maade som Cylinderen i Opgave № 32) som en Pyramide med uendelig mange Kanter; vi skære den nu op langs en Frembringer og dreje efterhaanden

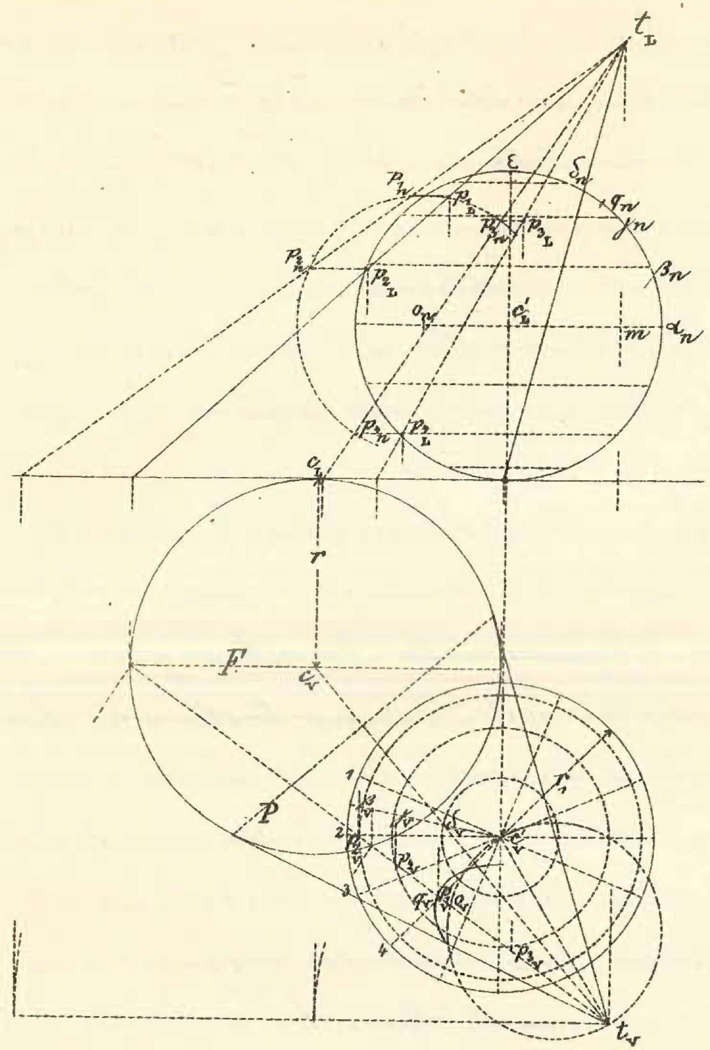


de enkelte Fladelementer om de konsekutive Frembringere ind i en og samme Plan. I Praksis maa vi erstatte de uendelig smalle Elementer med Elementer af endelig Bredde; det bliver altsaa kun en (ganske vist i praktiske Anvendelser tilstrækkelig nöjagtig) Tilnærmelse, vi faa med at göre.

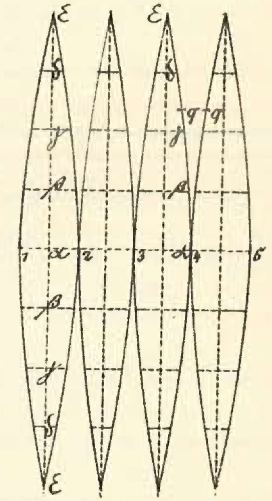
Vi betragte altsaa Keglefladen som bestaaende af de smaa Trekanter $t\,a\,a_1$ (hvor Buen $a\,a_1$ er erstattet af Korden), $a\,a_1$ haves i den foreliggende Opgave straks i sand Störrelse; desuden er i Fig. vist, hvorledes vi, ved at dreje en Frembringer $t\,a$ ned i en vandret Plan gennem Toppunktet, i vandret Billede faa den at se i sand Störrelse tillige med Stykkerne $t\,p_1$ og $t\,p_2$ af den. — Vi benytte ved Udfoldningen naturligvis saa vidt muligt kun de Frembringere, der ere brugte ved Konstruktionen af Skæringskurven; men hvis Stykkerne $a\,a_1$ blive saa store, at vi ikke nöjagtigt nok kunne sætte Korden i Stedet for Buen, maa vi dele dem.

Nº 34 [FMB] Dobb. retv. Afb.

Givet en skæv Kegle ved: t: 80, 125½, 126½ mm.
c: 0, 49½, 47½ "
r = 47½ "
og en Kugle ved: c': 50½, 92½, 40 "
r_1 = 40 "



Skæringskurven mellem Kuglen og Keglen söges; Kuglen udfoldes.



For at finde Punkter af Skæringskurven kan man her enten anvende vandrette Hjælpeplaner, der skære begge Legemer i Cirkler, eller lodrette Planer gennem Keglens Toppunkt, der skære Keglen i Frembringere og Kuglen i Cirkler, hvis

Centrer ligge paa den i vandret Billede punkterede Cirkel, og hvis Radier straks faas af det vandrette Billede. Den förste Methode viser sig at være upraktisk, idet den gennemgaaende giver en daarlig Bestemmelse af Punkterne; den anvendes derfor kun til Bestemmelse af Punkterne paa Kuglens vandrette Omrids; den anden er derimod bedre.

Man lægger altsaa en vilkaarlig lodret Plan gennem Keglens Toppunkt; denne vil almindelig skære Keglen i to Frembringere, Kuglen i en Cirkel, hvilke ved Skæring bestemme fire Punkter af Skæringskurven. For at finde disse fire Punkter drejer man Hjælpeplanen med de deri beliggende Frembringere og Cirkel om tt_v ind i en Frontplan; alt, hvad der ligger i Planen, viser sig nu i sand Störrelse i lodret Billede ($m o_n = t_v o_v$) hvorpaa de sögte Punkter $p_{1n}, p_{2n} \ldots$ föres tilbage, saaledes som vist i Fig., hvor den ene af de behandlede Frembringere er en af Keglens Omridsfrembringere.—

Det viser sig nu maaske, at begge Skæringskurvens Billeder faa et Dobbeltpunkt; det-

te kan for det lodrette Billedes Vedkommende konstrueres nöjagtigt, medens man kan finde et geometrisk Sted for det i det vandrette Billede.—

Naar Skæringskurvens lodrette Billede faar et Dobbeltpunkt, maa dette hidröre fra, at to Punkter af Skæringskurven ligge paa samme Sestraale (vinkelret paa L); alle de Punkter paa Kuglen, der have denne Egenskab, ligge nu symmetrisk m. H. t. en lodret Frontplan gennem Kuglens Centrum (retvinklet Symmetri i Retningen vinkelret paa L); paa samme Maade ligge alle Punkter paa Keglefladen, der have den ovennævnte Egenskab, symmetrisk m. H. t. Planen bestemt ved Frontdiameteren F og Toppunktet t (skæv Symmetri i Retningen vinkelret paa L); de Punkter af Skæringskurven (altsaa paa begge Legemer), der ligge paa samme Sestraale vinkelret paa L, maa altsaa ligge symmetrisk i denne Sestraales Retning om de to Planers Skæringslinie; denne, der er en vandret Linie, findes, og ved Hjælp af en vandret Hjælpeplan derigennem findes de to Punkter, hvis lodrette

Billeder falde sammen. Paa lignende Maade findes, at de Punkter af Skæringskurven, hvis vandrette Billeder falde sammen, ligge symmetrisk baade m. H. t. en vandret Plan gennem Kuglens Centrum (retvinklet Symmetri) og m. H. t. Planen (P–t) (skæv Symmetri i Retningen vinkelret paa V); vandret Billede af Skæringslinien mellem disse to Symmetriplaner gaa gennem Dobbeltpunktet i vandret Billede.

Da Kuglen ikke er nogen udfoldelig Flade, kan den ikke engang theoretisk taget udfoldes nöjagtigt, saaledes som Kegler og Cylindere i de forrige Opgaver. Det, vi her tegne op under Navn af Kuglens Udfoldning, bliver altsaa, som Fölge heraf, kun en temmelig raa Tilnærmelse.

For at foretage denne Udfoldning af Kuglen gaa vi saaledes frem: Vi dele den vandrette Storcirkel i f. Eks. seksten lige store Dele ved Punkterne 1, 2, 3, ..., og gennem disse Punkter og Kuglens lodrette Diameter lægges Meridianplaner, ved hvilke Kuglen deles i sfæriske Tokanter. Endelig indlægges endnu seks vandrette Parallelcirkler, der tilligemed Æqvatorcirklen dele Halvdelen af en

vilkaarlig Meridiancirkel i otte lige store Dele ved Punkterne $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$. Vi tænke os nu ovennævnte sfæriske Tokanter rettede ud, saaledes at deres Midtlinier, der ogsaa ere Meridiancirkler, blive til rette Linier vinkelrette paa Midten af de tilsvarende Stykker (12, 23, ...) af Æqvatorcirklen, og ud ad hver af disse vinkelrette afsattes til begge Sider af Æqvator $\alpha\beta = \beta\gamma = \gamma\delta = \delta\varepsilon = \frac{1}{16}$ Storcirkel (Korden sættes for Buen). Hver af de ovenfor omtalte Parallelcirkler gennem $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, deltes, som vi have set, af de lodrette Meridianplaner i seksten ligestore Dele, hvert hörende til sin sfæriske Tokant; disse Stykker af Parallelcirklerne tænke vi os udfoldede som rette Linier parallele med det tilsvarende Stykke af Æqvator (deres Störrelse faas straks af vandret Billede). De Strimler, hvori Kuglen ved denne Operation er delt, tegnes nu ud ved Siden af hinanden, og hermed er selve Kuglefladens Udfoldning færdig; tilbage staar at finde Skæringskurvens Udfoldning.

Da hele Udfoldningen, som nævnt, ikke kan göre Fordring paa nogen större Nöjagtighed, benytte vi her ikke de konstruerede Punkter, men kun de Punkter af Skæringskurven, der ligge paa Skillelinierne mellem de enkelte Strimler, samt paa disses Midtlinier. For at finde, hvor et eller andet Punkt, for Eksempel q (paa Meridian N°4 og beliggende paa den överste Halvdel af Kuglen mellem Parallelcirklerne gennem γ og δ), kommer hen i Udfoldningen, dreje vi den Meridian, hvorpaa det ligger, om Kuglens lodrette Diameter ind i en Frontplan; herved beskriver Punktet en vandret Cirkel med Radius $c'_v\, q_v$ og kommer til q_n, der praktisk findes derved, at vi ved Hjælp af en Passer opsöge det Punkt af Kuglens lodrette Omrids mellem γ_n og δ_n, der har Afstanden $c'_v\, q_v$ fra den lodrette Diameter; dernæst afsættes Stykket $\gamma q = \gamma_n q_n$, saaledes som vist i Udfoldningen.

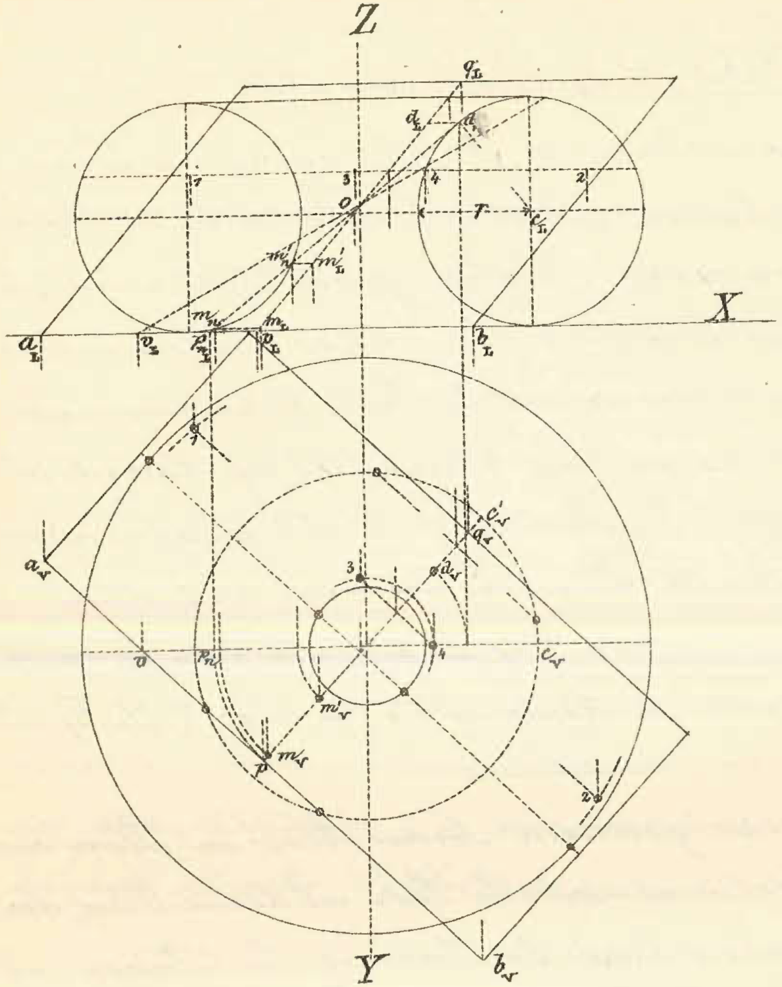
For Punkter nær ved Kuglens Poler (mellem ε og δ.) kan Afstanden fra ε til Punktet, maalt paa Meridianen, nöjagtig nok sættes lig $c'_v\, q_v$ og for Punkter i Nærheden af Ægvator kan et Punkts Afstand derfra, maalt paa Meridianen, sættes lig Afstanden fra Punktets lodrette Billede til Ægvators lodrette Billede.

N° 35 [M.B.] Dobb. retv. Afb.

Skæring mellem en Kuglering og en Plan.

Kugleringen har en lodret Akse, bestemt ved Koordinaterne $x = 0$, $y = 82$. Kugleringens Hovedmeridian er bestemt ved c (45, 82, 30) og $r = 30$. Snitplanen er bestemt ved at dens vandrette Spor gaar gennem Punkterne $a = (\div 81, 54, 0)$ og $b = (30, 165, 0)$ og derved, at den skal tangere Kugleringen. Ved Optrækningen tænkes Snitplanen kun eksisterende indenfor et Rektangel, hvis ene Side er $a\,b$; den dermed parallele Side ligger i en Höjde af 63 m/m over V. (Se Fig. n. Side).

Lægge vi gennem Torens Akse en Plan vinkelret paa Snitplanens vandrette Spor, vil denne Plan, der er en Symmetriplan baade for Toren og Snitplanen og derfor ogsaa for Skæringskurven, skære Snitplanen i en Foldlinie $p\,q$, Toren i to Meridiancirkler, hvoraf den ene har Centrum i c'. Ved nu at sörge for, at Foldlinien $p\,q$ kommer til at tangere den sidstnævnte Cirkel, opnaar man, at Snitplanen bliver Tangentplan til Kugleringen. Dette göres saaledes: Vi dreje den ovenfor omtalte Symmetriplan om Aksen



ind i Hovedmeridiananplanen; herved kommer p til p_n, og Cirklen med Centrum i c' falder sammen med Hovedmeridiancirklen; Linien pq viser sig nu i lodret Billede som Tangent fra p_{n_1} til Hovedmeridianen, Røringspunktet d_n bestemmes, og vi dreje nu tilbage, hvorved Punktet o paa Aksen bliver liggende, medens d_n kommer til d, der altsaa er Røringspunktet for Snitplanen og derfor Dobbeltpunkt for Skæringskurven, (da det nemlig er et hyperbolsk Punkt af Fladen). Tillige have vi nu be=

stemt de to andre Punkter m og m' af Skæringskurven, der ligge paa Symmetriaksen og som Følge deraf have vandrette Tangenter.

Man kan ogsaa indføre en ny lodret Billedplan vinkelret paa ab, herved udføres den samme Konstruktion let.

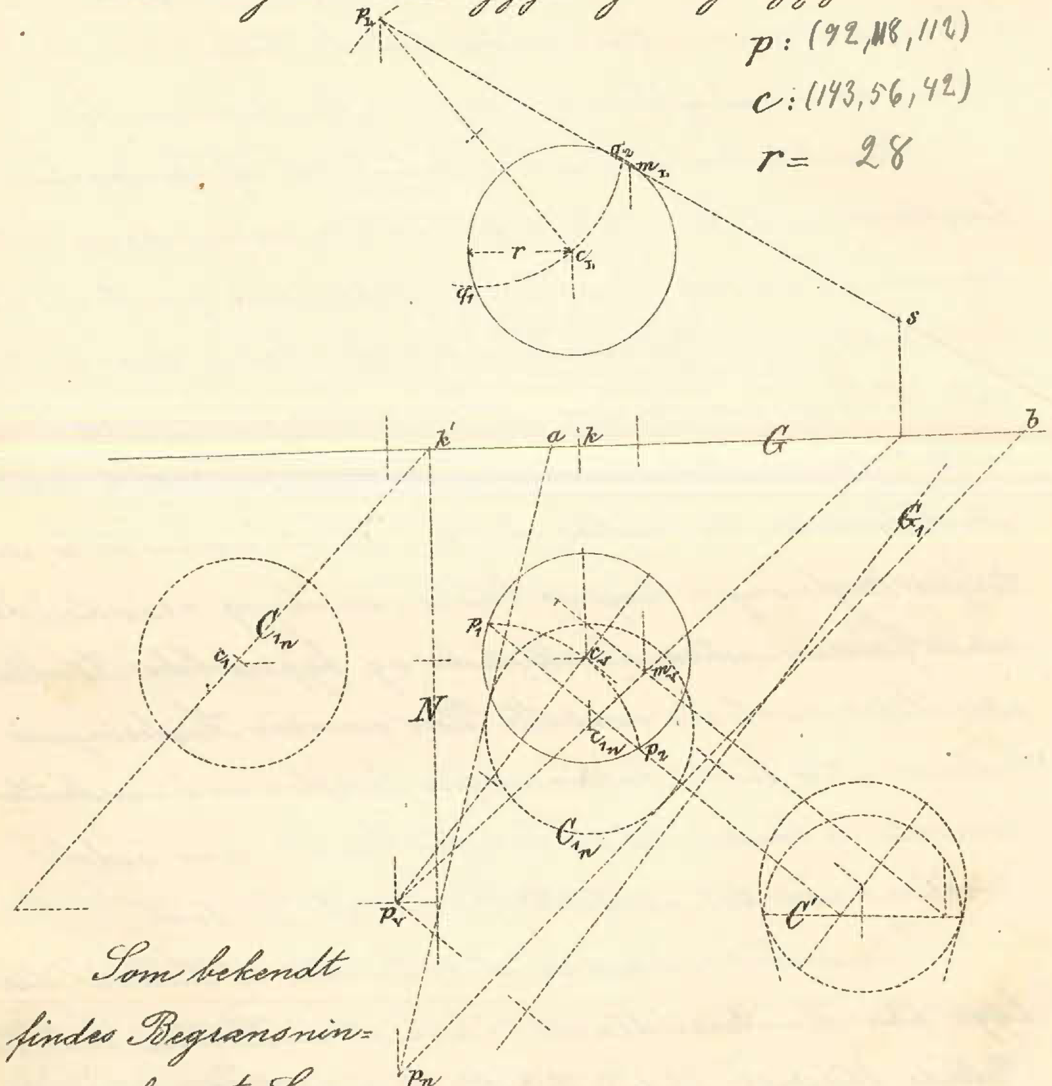
For at bestemme et vilkaarligt Punkt af Skæringskurven benytte vi os af en vandret Hjælpeplan, denne skærer Snitplanen i en vandret Linie, hvoraf Punktet paa pq straks haves, og Kugleringen i to Parallelcirkler, hvis Radier faas af lodret Billede; ved Skæring mellem den rette Linie og Cirklen bestemmes i alt fire Punkter af Kurven (1,2,3 og 4). Af de vandrette Hjælpeplaner, der benyttes, skal her specielt nævnes de to, der tangere Kugleringen langs de Cirkler (øverste og nederste), der danne Grænsen mellem de elliptiske og hyperbolske Punkter paa Fladen, samt den vandrette Plan gennem Kugleringens Centrum; de to første bestemme fire Punkter med vandrette Tangenter og hørende til det lodrette Omrids, den sidste Punkterne paa det vandrette Omrids af Fladen.

Endnu skal blot nævnes, at de Punkter af Kurven, der ligge paa Hovedmeridianen, (hvor altsaa Kurvens lodrette Billede tangerer Fladens lodrette Omrids) bestemmes ved at overskære Kuglering og Snitplan med Hovedmeridianplanen; Snitplanen bliver skaaret i Linien vo.

№ 36 [M B] Dobb. retv. Afb.

Der er givet et lysende Punkt p og en Kugle. Find Kuglens Selvskygge og Slagskygge.

p: (92,118,112)
c: (143,56,42)
r = 28



Som bekendt findes Begrænsningerne for et Legemes Selv- og Slagskygge for et lysende Punkt, henholdsvis

som Røringskurve for og Spor af en om Legemet omskreven Kegle med Toppunkt i det lysende Punkt. I det Tilfælde, at Legemet som her er en Kugle, blive Forholdene særligt simple, idet den omskrevne Kegle bliver en Omdrejningskegle; Røringskurven med Kuglen bliver en Cirkel C, og Keglens Spor i Billedplanerne bliver Keglesnit. For at bestemme Billederne af Cirklen C, kunne vi hensigtsmæssig projicere paa en ny lodret Billedplan parallel med pc (Grundlinien G_1). I denne Projektion vil C vise sig som en ret Linie C' (Røringskorden for p'); dens vandrette Billede bestemmes nu let og dernæst det lodrette (se Opg. № 18b). Specielt bestemmes Billedernes Toppunkter og de Punkter $p_1 p_2$ og $q_1 q_2$ af C, der høre med til Kuglens vandrette og lodrette Omrids.

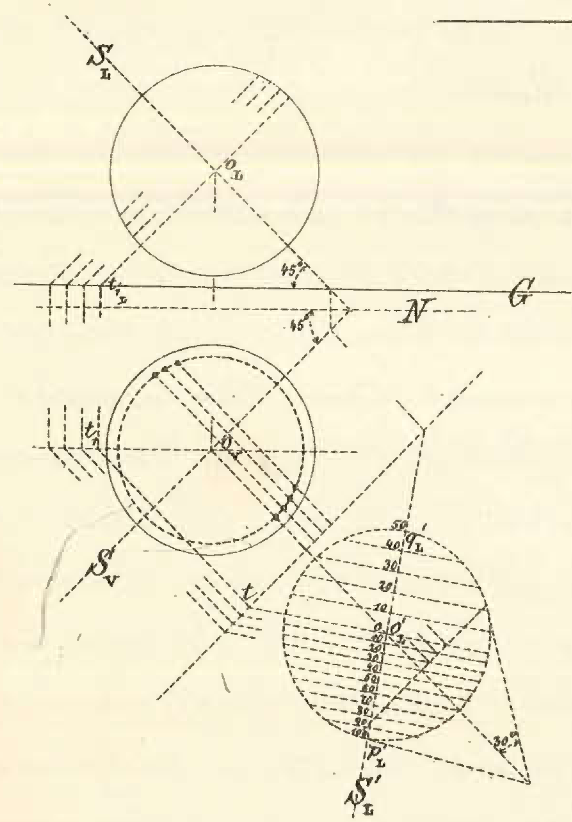
I vandret Billede er vist, hvorledes p_1 og p_2 findes ved Hjælp af Hjælpeprojektionen, men desuden er $p_1 p_2$ Polar for p_v som Pol med Hensyn til Kuglens vandrette Omrids, $q_1 q_2$ Polar for p_l som Pol med Hensyn til det lodrette Omrids. Dette indses saaledes: Man kan tænke sig, at man finder Punkter af Selvskyggelinien, idet man lader en Plan rulle paa Kuglen, saaledes at den stadig gaar gennem p; Planens Röringspunkter med Kuglen danne da Selvskyggelinien. Skal man nu have et saadant Punkt, der ligger for Eksempel paa Kuglens lodrette Omrids, da maa den omtalte Plan være vinkelret paa lodret Billedplan, den viser sig da i lodret Billede som en ret Linie gennem p_L og tangerende Kuglens lodrette Omrids i det søgte Punkt q_L.

For at bestemme Slagskyggelinien, söger man blot Sporene af Lysstraaler fra p og gennem de Punkter af Selvskyggelinien, man har konstrueret. (I Fig. er vist Konstruktionen af et Punkt s paa Lysstraalen p m). Specielt skal her konstrueres de Punkter af Slagskyggelinien, der ligge paa Grundlinien G; dette kan for Eksempel göres derved, at man gennem G og p lægger en Plan; denne Plan skærer Kuglen i en Cirkel, og Tangenterne til denne Cirkel fra p giver de søgte Punkter a og b. Konstruktionen er vist i Fig. Planen (p-G) nedlægges i G om V, derved kommer p til p_n, Cirklen C_1, hvori Planen skærer Kuglen til C_{1n} med Centrum i c_{1n} (Radius i Cirklen og Afstanden $c_1 k$ faas ved Projektion paa en

ny lodret Billedplan vinkelret paa G (Grundlinie N).

No 37 [MB] Dobb. retv. Afb.

Der er givet en Kugle med Diameter = 100 m/m; denne belyses med parallele Lysstraaler, hvis lodrette og vandrette Billeder danne 45° med Grundlinien. Find Kuglens Belysningslinier for Belysninger paa henholdsvis 10, 20, 30%.....



I No 21 (Side 69) have vi set, at Belysningslinierne paa en Kugle for parallele Lysstraaler ere Cirkler, hvis Planer ere vinkelrette paa Lysretningen, og at Belysningsintensiteten i % for en saadan Cirkel paa den direkte belyste Del af Kuglen er lig Afstanden fra Kuglens Centrum til Cirklens Plan, maalt paa en

Maalestok, der giver r (Kuglens Radius) = 100; ligger Cirklen derimod paa den indirekte belyste Del af Kuglen, er Intensiteten kun halv saa stor.

For at kunne anvende dette paa nærværende Opgave, projicere vi paa en ny lodret Billedplan parallel med Lysretningen; Belysningslinierne vise sig her som rette Linier vinkelrette paa Lysstraalens Projektion S_L'; vi dele altsaa $o_L' p_L'$ i 10, $o_L' q_L'$ i 5 lige store Dele, og gennem Delingspunkterne lægge vi Belysningsliniernes Planer.

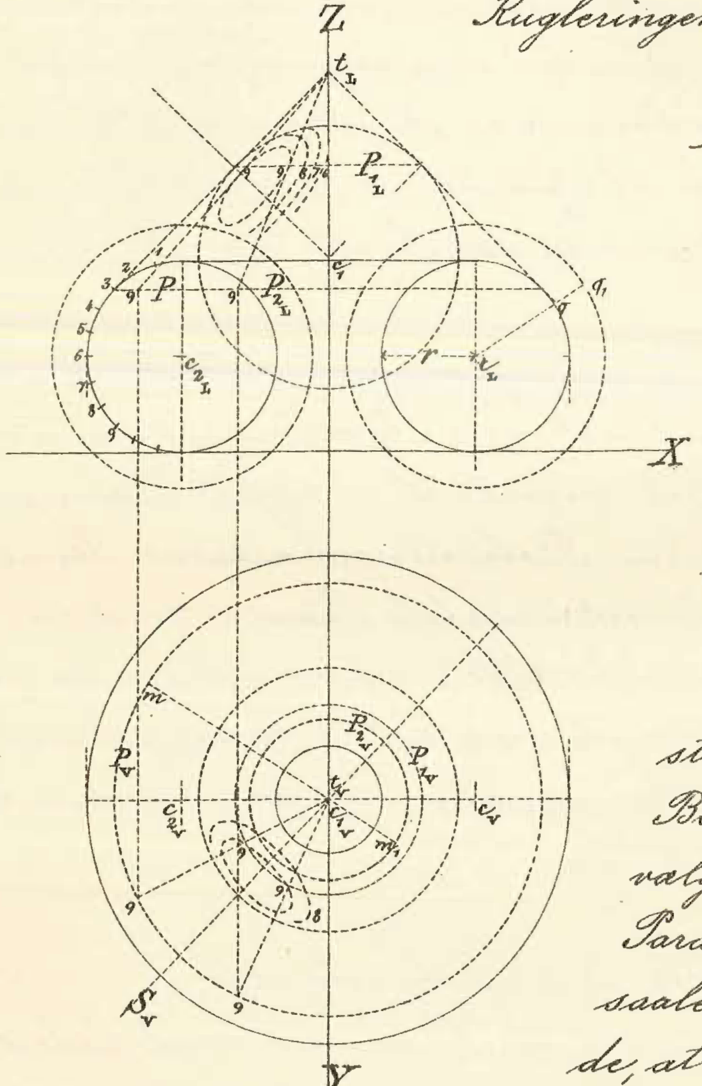
For at tegne vandret og lodret Billede af disse Belysningslinier benytte vi vandrette Planer, der skære Kuglen i vandrette Cirkler, hvis Billeder straks haves, og Belysningsliniernes Planer i rette Linier, der staa vinkelret paa den ovenfor nævnte nye lodrette Billedplan og altsaa ved Projektion paa denne viser sig som Punkter. I Fig. er vist Konstruktionen af nogle Punkter paa en saadan vandret Cirkel. (Af Hensyn til denne Kugles Anvendelse ved Konstruktionen af Belysningslinierne paa et Omdrejningslegeme med lodret Akse og samme Lysretning gör man bedst i at vælge de vandrette Hjælpecirkler

saaledes, at de dele en vilkaarlig valgt lodret Meridiancirkel paa Kuglen i Buestykker paa 15°). For at finde Belysningsliniernes Punkter paa Kuglens vandrette Omrids benyttes blot den vandrette Storcirkel som Hjælpeplan, og her, hvor Lysretningen er valgt som angivet, kan man nu finde Punkterne paa Kuglens lodrette Omrids ved Hjælp af Symmetrien om en Linie parallel med G gennem det Punkt, hvor S_L og S_V skære hinanden.

Havde Lysretningen været vilkaarlig, maatte man have konstrueret Punkterne paa det lodrette Omrids, derved at vi søgte Skæringslinierne mellem Belysningsliniernes Planer og Kuglens Frontstorcirkels Plan; alle disse Skæringslinier ere selvfölgelig parallele, og den ene af dem (t o) hörende til Belysningslinien o findes straks som angivet i Figuren, hvorpaa de andre ogsaa haves.

No 38 [MB] Dobb. retv. Afb.

Der er givet en Kuglering med lodret Akse A, den belyses med parallele Lysstraaler, hvis lodrette og vandrette Billeder danne Vinkler paa 45° med G.. Find Belysningslinierne paa Kugleringen svarende til Intensiteter paa 10, 20, 30..... %.



Kugleringen er givet ved:

$$A \begin{cases} x = 0 \\ y = 82 \end{cases}$$

$c: 146, 82, 30$

$r = 30$

Dernæst konstrueres Kugleringens Slagskygge.

For at konstruere disse Belysningslinier vælge vi os en Parallelcirkel P, saaledes beliggende, at en Omdrejningskegle, der er omskre-

ven om Kugleringen og rører den langs P, er kongruent med en om Kuglen i forrige Opgave omskreven Kegle, der rører den langs en af de omtalte vandrette Hjælpecirkler P_1 (Parallelcirklerne P gaa i denne specielle Opgave gennem Punkterne 1, 2, 3 ...., der dele Hovedmeridianen i Buer paa 15°, og i Fig. er betragtet den Parallelcirkel, hvis omskrevne Kugles halve Toppunktsvinkel er 45°; foreløbig betragtes kun den Del af Fladen, der bestaar af elliptiske Punkter).

Vi kunne nu tænke os Kuglen anbragt med Centrum i c_1, saaledes at de to ovennævnte Kegler falde sammen. Vi vide nu 1, at naar to Flader røre hinanden langs en Kurve, have de i et vilkaarligt Punkt af Røringskurven samme Belysningsintensitet (fælles Tangentplan og Normal), og 2, Belysningslinierne paa en Kegle ere Frembringere (samme Tangentplan i Punkter paa samme Frembringer); ved Hjælp heraf indses, at vi faa Punkterne 9, 8, 7... (af Belysningslinierne med Intensiteterne 90, 80, 70...) paa Parallelcirklen P ved at tegne Frembringerne gennem t og de tilsvarende Punkter 9, 8, 7 .... paa P_1. Vi kunne ved Konstruktionen bedst benytte det vandrette Billede, idet dette giver os alle Punkterne paa P, medens vi af det lodrette Billede kun faa Punkterne paa den forreste Halvdel af P; saalænge Punktet t falder indenfor Tegnepapiret, göre vi dog bedst i at benytte begge Methoder for Kontrollens Skyld. For paa en nem Maade at kunne anbringe Kuglen i de forskellige Stillinger, benytte vi en Kalke af den, forskyde Kalken saaledes, at den indtager de rette Stillinger og prikke for hver Stilling de paa den tilsvarende Cirkel P_1 liggende Punkter 9, 8, 7 ..... igennem. I vandret Billede bliver Kuglens Billede det samme, hvilken af ovennævnte Stillinger, den end indtager, da det kun drejer sig om en Forskydning i lodret Retning. — Punkterne paa Kugleringens vandrette Omrids faas alene af vandret Billede, idet t for denne Cirkels Vedkommende falder uendeligt fjernt; Punkterne paa det lodrette Omrids faas ved at anbringe Kuglen (stadig parallel forskudt) med Centrum i c eller c_2, prikke Belysningsliniernes Punkter paa henholdsvis Kuglens höjre og venstre Halvdel af det lodrette Omrids igennem og före den ind paa Kugleringens Hovedmeridian ved Radier til c eller c_2; det ind-

ses nemlig let at f. Eks. Punktet q_1 paa Kuglen og q paa Kugleringen have parallele Tangentplaner og altsaa samme Belysning.

For at konstruere Punkterne paa Symmetrimeridianen, der er vandret projiceret i S_v, kunne vi benytte en Hjælpeprojektion paa en lodret Plan parallel med S_v og Kuglens tilsvarende Hjælpeprojektion i forrige Opgave paa samme Maade, som vi lige have benyttet Kuglens lodrette Billede for at finde Punkterne paa Kugleringens lodrette Omrids.

Have vi nu konstrueret Belysningslinierne paa Kugleringens udvendige Del, kunne vi let bestemme dem paa den indvendige Del. Cirklen P's Plan skærer nemlig Kugleringen i endnu en Cirkel P_2, og betragte vi Punkterne m og m_1 henholdsvis paa P og P_2 (m og m_1 ligge paa modsatte Sider af Fladens Akse) ses det, at disse Punkter have parallele Tangentplaner og altsaa samme Belysningsintensitet, hvorfor man straks af Belysningslinierne paa den udvendige Del kunne finde Punkterne paa den indvendige Del af Kugleringen.

Kugleringens Slagskygge konstrueres ved gen=
nem de konstruerede Punkter af Belysningslinie o
(Röringskurven for en om Fladen omskreven Lys=
straalecylinder), at trække Lysstraaler og söge
disses Spor i Billedplanerne.

№ 39 [M B] Dobb. retv. Afb.

Der er givet en Omdrejningsellipsoide og
en Omdrejningshyperboloide, hvis Akser skære hin=
anden. Man skal konstruere deres Skæringskurve
samt Tangenten til denne i et af de konstruere=
de Punkter.

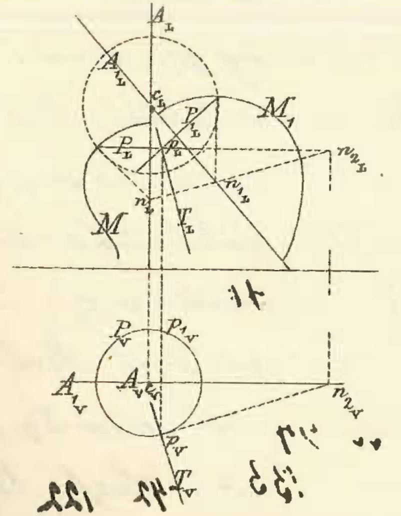
Ellipsoiden, der har lodret Akse med Koor=
dinaterne ($x = 0$, $y = 85$), er endvidere givet
ved sin Hovedmeridian:

o: (0, 85, 81) , $a = 74$, $b = 46$,

Hyperboloiden er givet ved sin Akse A_1 ,
der er bestemt ved ($y = 85$ og $-\frac{x}{135} + \frac{z}{94} = 1$) samt en
Frontfrembringer F givet ved ($y = 133$ og $-\frac{x}{42} + \frac{z}{122} = 1$).

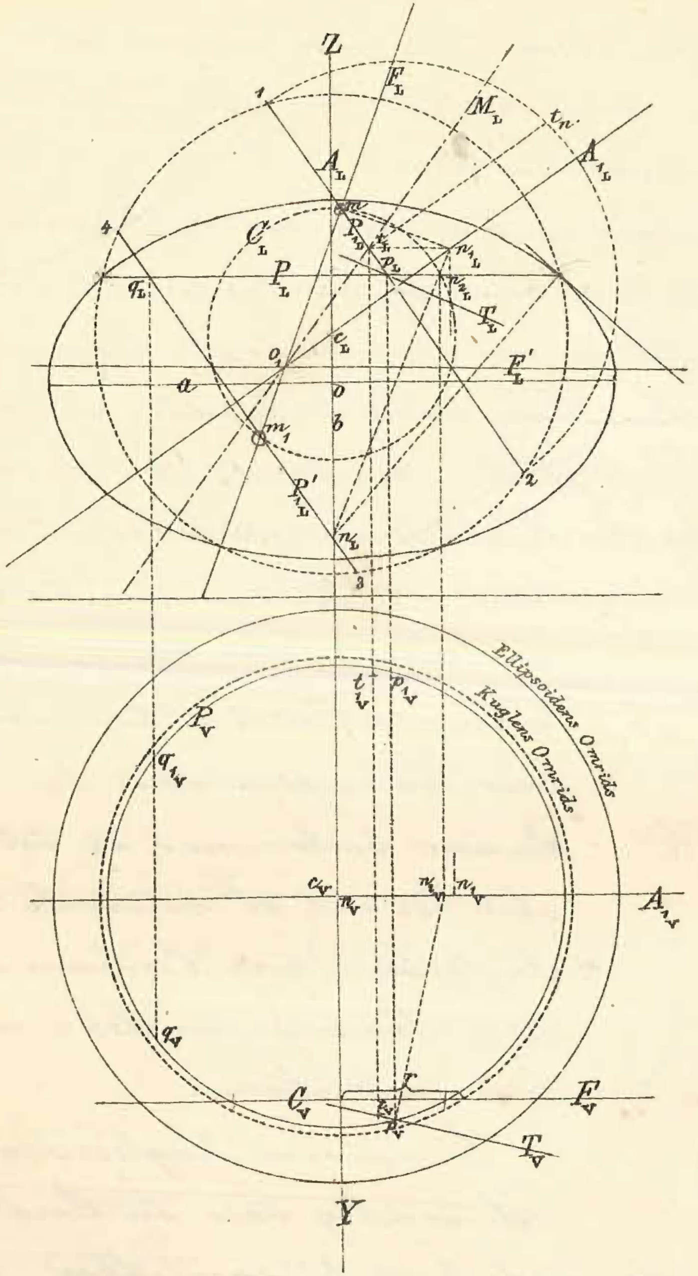
Lad Figuren Side 147 forestille to Omdrej=
ningsflader, hvis Akser skære hinanden i Punk=
tet c. Den ene Flades Akse er lodret, begge
Akser ere Frontlinier, og Hovedmeridianerne tan=

kes fuldkommen kendte, saaledes at man kan
tegne Tangenten til et hvilket som helst Punkt af
dem. For at finde Punkter af de to Fladers Skæ=
ringskurve, overskære vi dem med en Hjælpeflade;
denne vil skære hver af de givne Flader i sin Kur=
ve, og disse to Kurver ville (da de begge ligge paa
Hjælpefladen) skære hinanden i Punkter af den
søgte Kurve. Det gælder naturligvis om at væl=
ge den ovennævnte Hjælpeflade saaledes, at den
skærer Omdrejningsfladerne i Kurver, hvis Bille=



der blive simple Kurver (ret=
te Linier eller Cirkler), saa
deres Skæringspunkter let
kunne bestemmes, og dette
sker her ved at anvende en
Kugleflade, hvis Centrum lig=
ger i Skæringspunktet c mel=
lem de to Akser.

En saadan Kugleflade
vil nemlig være en Omdrej=
ningsflade baade med A og A_1 som Akse, og
følgelig skære de to givne Flader i to Cirk=
ler P og P_1 , hvis Planer staa vinkelret paa



henholdsvis A og A_1 og i den opgivne Stilling altsaa ogsaa paa lodret Billedplan. Cirklerne P og P_1 skære hinanden i to Punkter p og p_1, som i lodret Billede vise sig faldende sammen i p_L, i vandret Billede paa P_V, som straks kan tegnes.

For at konstruere Tangenten f. Eks. i p benytte vi os af, at den staar vinkelret paa Planen bestemt

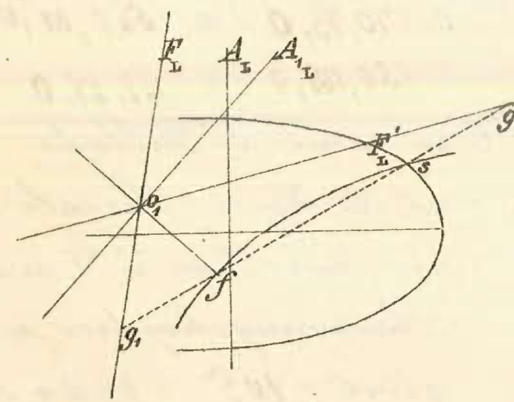
ved de to Fladers Normaler i Punktet p (Tangenten findes nemlig som Skæringslinie mellem de to Tangentplaner, der hver især er vinkelret paa sin Normal). Desuden vide vi, at Normalerne til en Omdrejningsflade langs en Parallelcirkel danne en Omdrejningskegle med Toppunkt n paa Fladens Akse, og dette Toppunkt findes her let, idet vi gaa ud til det Punkt af Parallelcirklen, der ligger paa Hovedmeridianen, hvor Fladens Normal derfor i lodret Billede viser sig som Normal til Hovedmeridianen. Normalerne i p til de to Flader ere altsaa pn og pn_1; den Plan, som er bestemt med pn og pn_1, har Sporet nn_1 i Hovedmeridianplanen, og Tangentens lodrette Billede viser sig altsaa vinkelret paa $n_L n_{1L}$. Tangentens vandrette Billede viser sig vinkelret paa en vandret Linie i Planen (pnn_1); en saadan Linie er f. Eks. pn_2, hvor n_2 ligger paa nn_1.

Det er nu disse Operationer, der i den store Fig. ere udførte for Ellipsoidens og Hyperboloidens Vedkommende. Man begynder med at vælge P gennem et Par konstruerede Punkter af Hovedmeridianen for Ellipsoiden; dernæst tegnes med Centrum c Kuglen, der indeholder P; det gælder nu om at finde Parallelcirklen P_1, hvor Kuglen skærer Hyperboloiden. For at finde et Punkt af denne Cirkel overskære vi baade Kugle og Hyperboloide med en Frontplan gennem Frembringeren F; denne Plan skærer Kuglen i en Frontcirkel C, (hvis Radius r straks findes af vandret Billede; i lodret Billede viser C sig som en Cirkel C_L med Centrum i c_L); den skærer Hyperboloiden i to Frontfrembringere, hvoraf den ene er den givne F, medens den anden (F') i lodret Billede viser sig symmetrisk med F_L med Hensyn til A_{1L}, F og C skære hinanden i to Punkter m og m_1, og vi faa altsaa i dette Tilfælde to Parallelcirkler P_1 og P_1'; disse give sammen med P de fire Punkter p, p_1, q og q_1. Endepunkterne (1, 2, 3 og 4) af de lodrette Billeder af Parallelcirklerne P_1 og P_1' høre med til Hyperboloidens lodrette Omrids (hvilket indses umiddelbart ved Betragtning af Hjælpefiguren); dette er en Hyperbel med Centrum i o_1 og med F_L og den ovenfor omtalte anden Frontfrembringers lodrette Billede (F_L') som Asymptoter; den reelle Halvakse er lig den

korteste Afstand fra Hyperboloidens Akse til Frembringeren og staar vinkelret paa A_{1L}. For at konstruere Tangenten T i p gaa vi frem som ovenfor nævnt; vi gaa ud til det Punkt af P, som ligger paa Ellipsoidens Hovedmeridian, konstruere her Tangenten til denne og faa derpaa Punktet n paa Ellipsoidens Akse. For at faa fat i n_1 paa Hyperboloidens Akse, gaa vi ikke paa P_1 ud til Hovedmeridianen, men kun til det Punkt m, som ligger paa F; Tangentplanen til Hyperboloiden i dette Punkt er bestemt ved F og den anden Frembringer gennem m. F er altsaa en Frontlinie i Tangentplanen, følgelig parallel med dennes lodrette Spor, og Normalen m n_1 viser sig altsaa i lodret Billede vinkelret paa F_L.

Nu tegnes Tangentens Billeder $T_L \perp n_L n_{1L}$ og $T_V \perp p_V n_{2V}$. — (Man kan, f. Eks. ved Anvendelse af Involution paa Ellipsoidens Akse, konstruere den Cirkel, hvori en valgt Kugle anden Gang skærer Ellipsoiden, men da det viser sig, at denne Cirkel kun bliver reel ved et Par enkelte af de Hjælpekugler, man vælger sig, lønner det sig ikke at udføre Konstruktionen). — Ellipsoidens vandrette Omrids er selv-følgelig en Cirkel, Hyperboloidens faas ved at om=skrive den med en Cylinder med lodrette Frembrin=gere; denne Cylinders Spor i V er det søgte Om=rids, og dette bliver altsaa vandret Billede af Røringskurven M mellem Hyperboloiden og Cylinderen; da Fladen nu er en Keglesnitsflade, vil denne Rø=ringskurve ligge i Polarplanen for det Punkt, der er uendelig fjernt i Z-Aksens Retning. Denne Polarplan vil staa vinkelret paa lodret Billedplan og altsaa i lodret Billede vise sig som en ret Linie M_L gennem o_1; den er altsaa bestemt, hvis vi kunne finde endnu et Punkt af den; dette kan let udføres, idet vi vide, at Hyperboloiden i ethvert Punkt af den søgte Røringskurve M har lodret Tangentplan, altsaa vandret Normal; vil=le vi nu søge det Punkt t af M, som ligger paa Parallelcirklen P_1, kan dette ske derved at, vi vi=de, at Normalerne til Hyperboloiden langs P_1 alle gaa gennem n_1 ($n_{1L} t_L \neq G$). Vandret Bil=lede af Punktet t faas, idet vi ved Nedlag=ning af P_1 om Diameteren 1-2 finder Punktet t's Afstand ($t_L t_n$) foran eller bagved Hovedmeri=dianplanen.

Af Skæringskurven mellem de to Legemer findes af Konturpunkter kun de nøjagtigt, som ligge paa Ellipsoidens vandrette Omrids; de, som ligge paa Hyperboloidens vandrette Omrids faas med Tilnær=melse ved Hjælp af Skæringskurvens lodrette Billede og M_L. Endelig kunne de Punkter, der ligge paa det lodrette Omrids, altsaa Billedet af de Punkter, hvori de to Hovedmeridianer skære hinanden, fin=des (tilnærmelsesvis) saaledes: af Hyperboloidens lod=

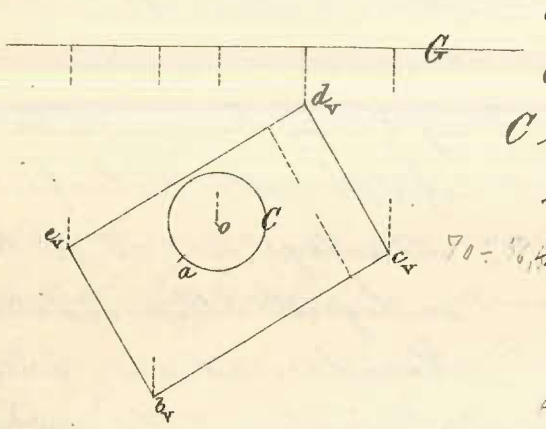


rette Omrids kende vi baa=de Akser, Asymptoter (F_L og F'_L) og Endepunkter af den reelle Halvakse; vi antage nu, at vi ha=ve tegnet Ellipsoidens Hovedmeridian; antage vi, at s er Skæringspunktet mellem Ellipsen og Hyperblen, da skal, naar vi trække Linien fra s gennem Hyperblens Toppunkt, s g være lig f g_1; er dette ikke Tilfældet, maa vi flytte s lidt, indtil det passer.

Endnu skal kun tilføjes, at Hyperbolo=iden tænkes begrænset af et Par Parallelcirkler, der naturligvis vælges saaledes, at vi faa hele Skæringskurven med; dennes lodrette Billede bliver forøvrigt et Keglesnit, hvilket følger af, at det er Spor i lodret Billedplan for en Cylinder, hvis Frembringere hver indeholde to Punkter af Skæringskurven, der er en Rumkurve af 4de Orden.

No 40 [MB] Dobb. retv. Afb. Format 53x34½ cm.

o: (70, 93, 0) a: (56,5, 101, 0)
b: (50, 135, 0) c: (157, 88, 0)

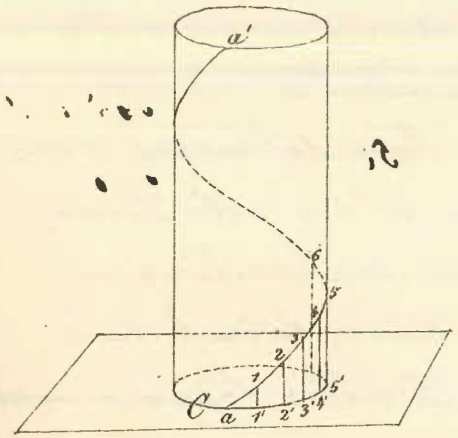


C er vandret Billede af en Højre-Skruelinie, hvis Spor i V er a. Skruegangshøjden er givet = 105. bcde er et Rektangel, hvoraf bc ligger i V, de i en vandret Plan z = 105.

Den Del af Skruelinien, der ligger mellem V og sidstnævnte vandrette Plan er Spidskant for en udfoldelig Skrueflade. Der søges Skæringskurven mellem denne og Planen bcde. Baade Skrueflade og Plan tænkes kun eksisteren-

de mellem V og den vandrette Plan z = 105

En Skruelinie fremkommer som bekendt, idet et Punkt bevæger sig paa en cirkulær Cylinder, saaledes at det forskydes med jævn Hastighed i Frembringerens Retning, samtidig med at det drejer sig med jævn Hastighed om Cylinderens Akse. Naar Punktet a har drejet sig 360° om Cylinderens Akse og altsaa er kommet til a', har det beskrevet en Skruegang; aa' kaldes Skruegangshøjden.

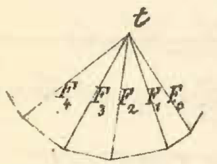


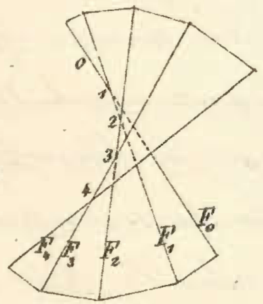
Skulle vi nu konstruere Punkterne 1, 2, 3, ..., (der f. Eks. kunne dele den tegnede Skruegang i seksten ligestore Dele) kan dette let ske, idet vi kende Skruelinens Spor i V (Cylinderen, hvorpaa den ligger tænkes her retstaaende) samt Skruegangshøjden, som vi for Fremtiden ville betegne med H. Ved Punkterne 1', 2', 3'..... dele vi Cirklen C i seksten ligestore Dele, tegne Cylinderfrembringerne gennem disse Punkter og afsætte 11' = $\frac{1}{16}$ H,

$2'2 = \frac{2}{16} H$ o. s. v.

En af Skruelinens vigtigste Egenskaber er den, at den kan forskydes hen ad sig selv, (en Egenskab, den har fælles med Cirklen og den rette Linie). Dette indses saaledes: Lade vi alle Punkterne 1, 2, 3 .... dele Skruelinien i lige store, men uendelig smaa Elementer, indses det ved Hjælp af Skrueliniens Definition, at hvis vi skrue Punktet a (i fast Forbindelse med Skruelinien) til 1, saa vil 1 samtidig komme i 2, 2 i 3 o. s. v.; lige store Stykker af samme Skruelinie ville altsaa være kongruente.

En udfoldelig Flade kan defineres som en Flade, der frembringes af en ret Linie, der bevæger sig saaledes, at den er Tangent til en Rumkurve (d. e. en Kurve, hvoraf kun tre paa hinanden fólgende Punkter ligge i samme Plan.





Lad i hosstaaende Fig. 0, 1, 2, 3, 4 betegne consecutive Punkter af en Rumkurve, Tangenterne F_0, F_1, F_2 ..... til

denne bestemmes hver af to consecutive Punkter og ere Frembringere paa en udfoldelig Flade, der har Kurven 0, 1, 2, 3, 4 ... til Spidskant, (hvorfor den kaldes saaledes vil fremgaa af det fólgende). Man ser, at hver Frembringer ved sit Róringspunkt med Spidskanten deles i to Dele, hvoraf den ene hórer til Fladens óvre Net, det andet til det nedre. To consecutive Frembringere skære hinanden i et Punkt af Spidskanten, og Planen bestemt af to paa hinanden fólgende sammenfaldende Frembringere er Tangentplan til Fladen, og denne faar altsaa i alle Punkter af en Frembringer samme Tangentplan.

En Plan, der er bestemt af tre consecutive Punkter paa Rumkurven, kaldes en Osculationsplan for denne, f. Eks. Planen (1, 2, 3) (= Planen (F_1F_2)); vi se, at Osculationsplanerne for Rumkurven blive Tangentplaner til den udfoldelige Flade og omvendt; den Cirkel, som ligger i Osculationsplanen og er bestemt ved de tre samme consecutive Punkter som denne, kaldes Kurvens osculerende Cirkel (Krumningscirkel) i det betragtede Punkt.

Fladen kaldes udfoldelig, fordi den kommer til at bestaa af plane Elementer, hvert bestemt ved to consecutive Frembringere ($F_0 F_1$, $F_1 F_2$, ...), og vi kunne altsaa dreje et saadant Element om den Frembringer, det har fælles med det fölgende ind i dettes Plan, dernæst dreje disse to Elementer om den næste Frembringer ind i det tredies Plan o.s.v., og saaledes kunne vi tilsidst faa hele Fladen liggende i een Plan. (I Praksis kunne vi naturligvis ikke behandle Elementer af uendelig lille Bredde, men maa nöjes med en Tilnærmelse).

Under Udfoldningen bliver alt, hvad der ligger i eet Fladeelement (f. Eks. de tre Punkter 012, 123, ..., der bestemme Osculationscirklen) uforandret, altsaa vil Spidskanten i Udfoldningen faa samme Krumningscirkel i hvert Punkt, som den har i Virkeligheden. Er Spidskanten en Skruelinie, maa den altsaa (med den udfoldelige Flade) udfoldes som en Cirkel, idet vi ovenfor have set, at dens enkelte Elementer vare kongruente, og altsaa have kongruente Krumningscirkler.

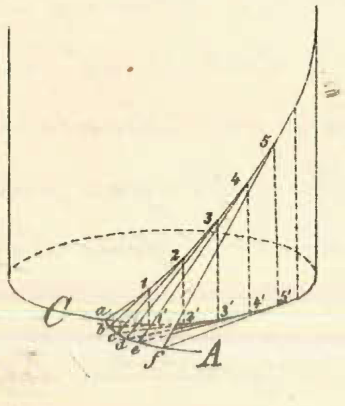
Tænke vi os alle Frembringerne F_0, F_1, F_2 parallelforskudte, saaledes at de alle gaa gennem samme Punkt t, ville de danne en Kegleflade, der kaldes Retningskegle saavel for Rumkurven som for den udfoldelige Flade. Denne Kegle faar fölgende Egenskaber: 1, Enhver af dens Frembringere er parallel med en tilsvarende Tangent til Rumkurven (Frembringer paa den udfoldelige Flade) og 2, Enhver af dens Tangentplaner er parallel med en tilsvarende Osculationsplan til Rumkurven (Tangentplan til den udfoldelige Flade).—

Söge vi Skæring mellem en Plan og en saadan udfoldelig Flade, finde vi Snitkurvens enkelte Punkter ved at söge Skæring mellem de enkelte Frembringere og Snitplanen; Tangenten til et Punkt af Skæringslinien findes som Skæringslinie mellem Snitplan og Fladens Tangentplan langs den Frembringer, hvorpaa Punktet ligger.

Skærer Snitplanen Spidskanten i et Punkt, falde her to paa hinanden fölgende Punkter af

Snitkurven sammen, og denne faar altsaa en Spids i dette Punkt (heraf Navnet Spidskant).

Vi vende nu tilbage til Skruelinien, og tænke os den ved Punkterne a, 1, 2 ..... delt i uendelig smaa Elementer. Tangenterne til Skruelinien bestemmes da ved Elementerne a1, 12, 13 ..., deres Spor i V ere Punkterne a, b, c ..., og vi kunne nu bevise, at det geometriske Sted for disse Punkter er en Afvikler A for Cirklen. Dette indsees let, idet vi erindre, at alle Skrueliniens Tangenter danne samme Vinkel med Cylinderfrembringerne og altsaa ogsaa med V; heraf følger nemlig:

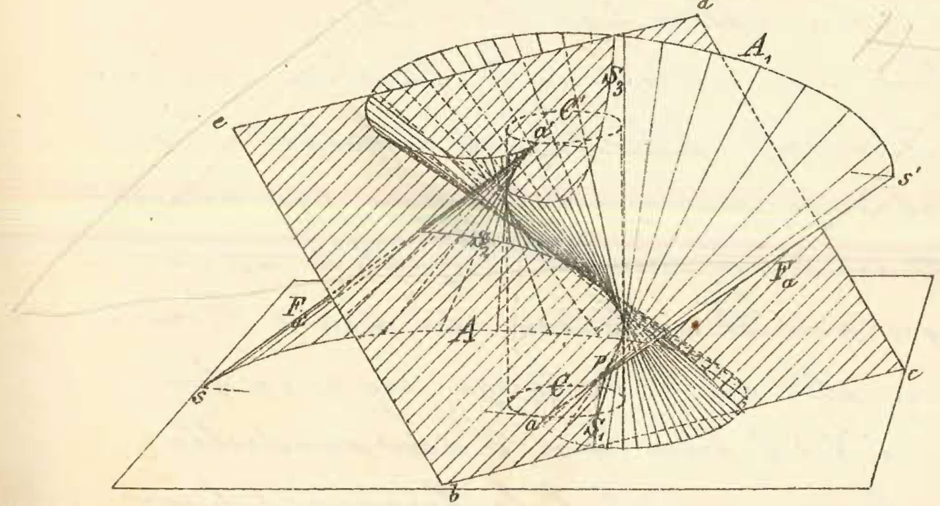


$\triangle\, a11' \cong b11'$, altsaa $a1' = b1'$; $\triangle\, b22' \cong c22'$, altsaa $c2' = b2' = a1' + 1'2' = \smile a2'$ o.s.v., eller med andre Ord, b, c, d ... ligge paa en Afvikler til C; denne Afvikler bliver altsaa det vandrette Spor for den udfoldelige Skrueflade, der har Skruelinien til Spidskant.

Paa samme Maade indsees at f. Eks. $d3 = \smile a123$ af Skruelinien, saa at A ogsaa er

en Afvikler for Skruelinien. Altsaa vil (se Fig. nedenfor) man have $sa' = sa$ = Længden af en Skruegang af Skruelinien.

Vi ville nu efter disse indledende Bemærkninger give os i Fard med at løse den stillede Opgave i dobbelt retvinklet Afbildning; men for Anskueligheds Skyld er der desuden i hosstaaende Fig. tegnet en Skitse af den Del af Skruefladen, som betragtes i Opgaven.



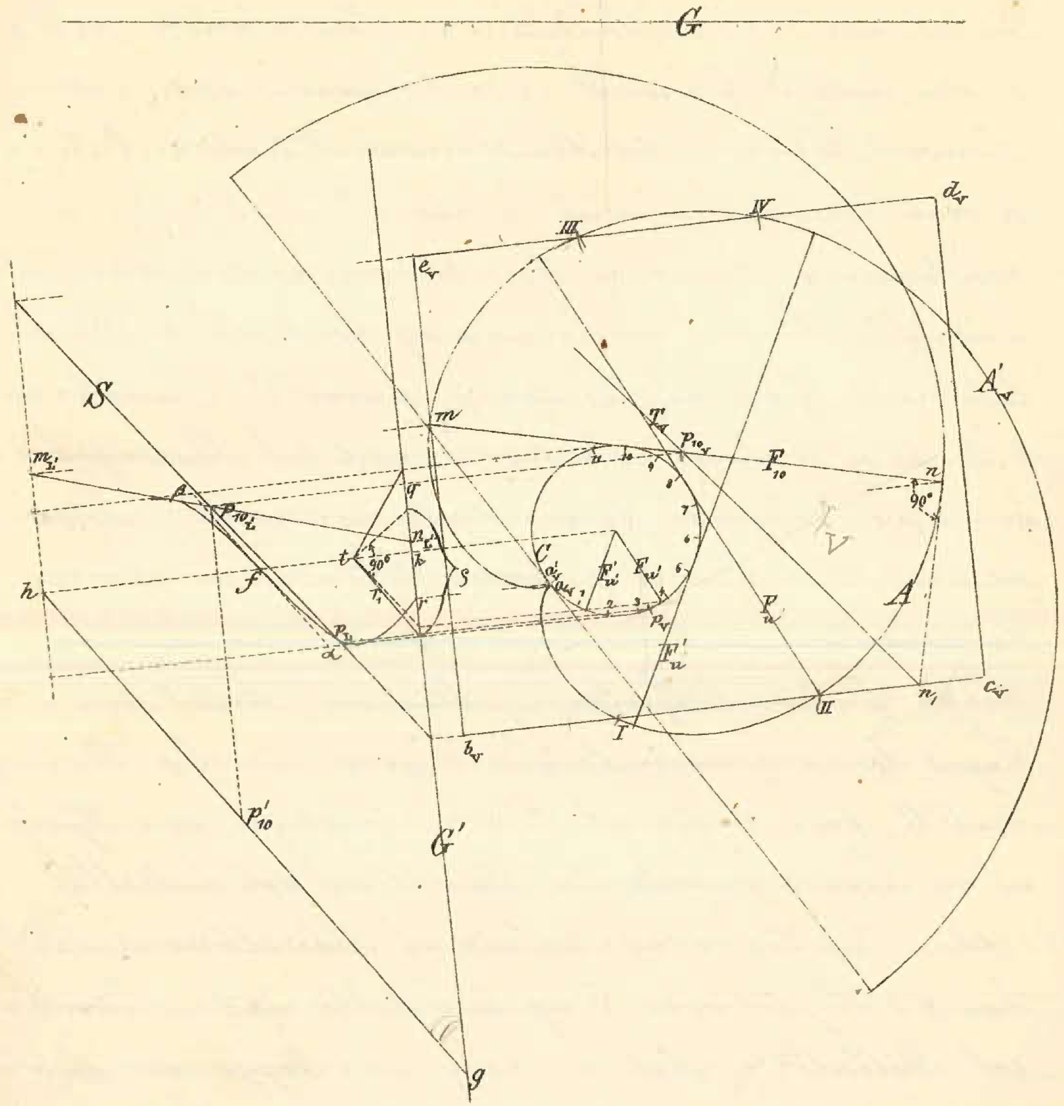
C og C' ere Sporene af den cirkulære Cylinder, hvorpaa Skruelinien ligger, i V og i en vandret Plan i en Afstand = H derover. A og A' ere Skruefladens Spor i de to vandrette Planer (Afviklere til C og C'), og foruden af disse begrænses Skruefladen af de to parallele Frembringere F_a og $F_{a'}$, der ere Tangenter til Skruelinien i a og a'; endelig er paa Fig. indtegnet en

Snitplan bcde, der i den Stilling, vi her ville betragte, skærer Fladen i de tre Kurvestykker S_1, S_2 og S_3; den skærer Spidskanten i Punktet p, og her har altsaa S_1 en Spids.

Vi begynde med at tegne de to Afviklere A og A'_v, idet vi konstruere de Punkter af dem, som ligge paa Tangenterne til Punkterne 1, 2, 3..., der dele C i sekten lige store Dele.

Stykket m n mellem de to Afviklere paa en vilkaarlig Tangent (f. Eks. F_{10_v}) er konstant lig hele Cirkelperiferien, hvilket ogsaa kan indses derved, at det er en vandret Projektion af en Frembringer paa Skruefladen; da disse Frembringere nu alle ere lige lange, regnede fra deres Spor i V til deres Spor i den vandrette Plan, der begranser det hele foroven, (hver lig Længden af en Skruegang) og de alle danne samme Vinkel med V, ere deres vandrette Projektioner ogsaa lige store.

Vi have nu vandret Billede af de sytten Frembringere paa Fladen, der tangere Skruelinien i a, a' og de femten mellemliggende Punkter; deres Projektioner paa en vilkaarlig lod-



ret Plan kan let tegnes, idet vi kende deres Spor i de to vandrette Planer (f. Eks. m og n for F_{10}). — For nu at finde de Punkter, hvori disse Frembringere skære den givne Snitplan, projicere vi paa en ny lodret Billedplan vinkelret paa

Snitplanen (Grundlinien G'); Snitplanen projiceres helt i Linien S', Frembringerne som rette Linier (Tangenter til Skruelinens Billede). I Fig. er vist Konstruktionen af Punktet p_{10} paa F'_{10}; for at konstruere p_{10_1} tegne vi Frembringerens lodrette Billede, före Punktet op herpaa og kontrollere Resultatet ved Hjælp af Höjden p_{10_1} q over V. Punkterne I, II, III og IV höre naturligvis med til Skæringskurven og ere dennes Spor i de to vandrette Grænseplaner. Det Punkt p, hvori Snitplanen skærer Spidskanten, og hvor Snitkurven altsaa har en Spids, findes af Hjælpeprojektionen; hvis (som i Fig.) den projicerende Linie giver daarlig Skæring med C, maa vi for at faa p_v nöjagtigt, ved Hjælp af en Passer oplede det Punkt af det lodrette (ikke i Fig. tegnede) Billede af Skruelinien, der har p's Höjde over V og före dette ned i vandret Billede; p_v skal nu ligge paa begge de projicerende Linier og C.

Tangenten i et vilkaarligt af de konstruerede Punkter findes, som ovenfor nævnt, som Skæringslinie mellem Snitplanen og Tangentplanen langs Frembringeren F, hvorpaa Punktet ligger. Denne Tangentplans vandrette Spor er Tangent til Afvikleren A, altsaa vinkelret paa F_v; i Fig. er vist Konstruktionen af Tangenten i p_{10}

For at konstruere Snitkurvens Asymptoter finde vi först Snitkurvens uendelig fjærne Punkter; da et almindeligt Punkt findes ved Skæring mellem en Frembringer og Snitplanen, gælder det altsaa om at opsöge de Frembringere paa Fladen, der ere parallele med Snitplanen; disse findes saaledes: Vi parallelforskyde Snitplanen, indtil den gaar gennem Retningskeglens Toppunkt t; den skærer nu denne i de to Frembringere $F_{u'}$ og $F'_{u'}$; de hermed parallele Frembringere F_u og F'_u paa Skruefladen give altsaa uendelig fjærne Punkter af Skæringskurven; Tangentplanerne langs dem skære Snitplanen i Asymptoterne til Kurven.

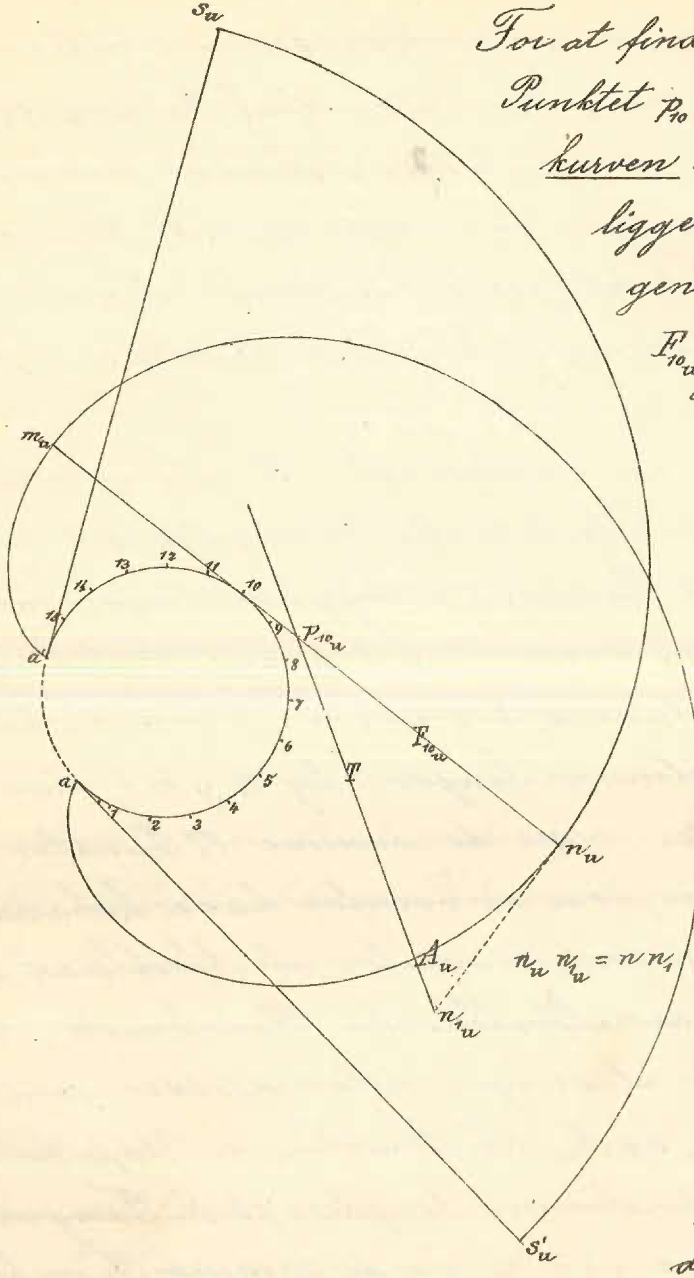
[Retningskeglen tænkes her anbragt med samme Grundflade C, som den cirkulære Cylinder, hvorpaa Skruelinien ligger; dens ene Omridslinie er parallel med g h, idet g k er lig den vandrette Projektion af en vilkaarlig Frembringer paa Fladen (lig Længden af C's Periferi); Vinklen h g k er nemlig da lig den Vinkel, en vilkaarlig Frembringer paa Fladen danner med V; gh er sand Længde af en Frembringer, altsaa ogsaa lig sand Længde af en Skruegang af Skruelinien].

For at kunne udfolde Skruefladen maa vi först konstruere Radius af den osculerende Cirkel i et vilkaarligt af Skrueliniens Punkter, (vi saa ovenfor, at den var konstant) og vi kunne f. Eks. vælge det (i Forhold til den lodrette Hjælpeplan gennem G') foreste Punkt f, der projiceres i det Punkt, hvor Skrueliniens Billede skærer Aksens Billede. Den osculerende Plan for dette Punkt er parallel med Tangentplanen til Retningskeglen langs den med Skrueliniens Tangent parallele Frembringer; da denne i dette Tilfælde bliver Retningskeglens Omridsfrembringer, bliver altsaa Osculationsplanen vinkelret paa den lodrette Billedplan (gennem G'). Osculationsplanen skærer den cirkulære Cylinder i en Ellipse, der projiceres i Linien $\alpha - \beta$; denne Ellipse indeholder de samme tre consecutive Punkter af Skruelinien som den osculerende Plan, og fölgelig er Krumningsradius for Ellipsen i Endepunktet af dens lille Halvakse lig Krumningsradius for Skruelinien.

Halvakserne i Ellipsen ses let at være lig Sidelinien r_1 af Retningskeglen og Radius r i den cirkulære Cylinder, hvorpaa Skruelinien ligger, og vi vide da at Krumningsradius ρ i det betragtede Punkt af Ellipsen er lig $\frac{r_1^2}{r}$; den kan derfor konstrueres saaledes som vist i Fig.

Vi have nu ovenfor set, at idet vi udfolde Skruefladen, vil Spidskanten blive udfoldet som en Cirkel med Radius ρ; vi begynde derfor med at tegne denne Cirkel. Udad denne Cirkel afsatte vi nu Stykkerne $a-1 = 1-2 = 2-3 \ldots\ldots = 15-a'$, hver lig $\frac{1}{16}$ af Skrueliniens Længde (lig $\frac{1}{16}\,gh$); disse Punkter $a, 1, 2, \ldots\ldots$ ere de samme 17 Punkter af Skæringslinien, som vi ovenfor have behandlet.

Vi saa endvidere ovenfor, at Afviklerne A og A' ogsaa være Afviklere for Skruelinien; heraf fölger atter, at de igen ville udfoldes som Afviklerne A_a og A'_a til Skrueliniens Udfoldning ($as'_a = a's_a$ = Skrueliniens Længde $= gh$). Tangenterne i Punkterne $1, 2, 3 \ldots\ldots$ ere de samme Frembringere, som vi ovenfor benyttede for at finde Skæringskurvens Punkter.



For at finde f. Eks., hvor Punktet p_{10} af <u>Skæringskurven</u> kommer til at ligge i Udfoldningen, tegne vi först F_{10_u} $(m_u n_u = gh)$. Vi kunne nu tanke os, at vi först dreje Frembringeren F_{10} om en lodret Akse, saaledes at den bliver parallel med den lodrette Billedplan (gennem G'), dernæst at vi parallelforskyde den, indtil dens Billede falder i Linien gh; under begge disse Operationer har Punktet p_{10} beskrevet vandrette Ba=

J. Chr. Jensen

ner, der i den lodrette Projektion viser sig som en vandret Linie; gp'_{10} og $p'_{10}h$ ere da sand Störrelse af de Stykker np_{10} og $p_{10}m$, hvori p_{10} deler Frembringeren F_{10}; vi afsætte altsaa $n_u p_{10_u} = g p'_{10}$ og skulle da (hvis Afviklerne A_u og A'_u ere rigtigt tegnede) have $p_{10_u} m_u = p'_{10} h$.

Paa denne Maade findes Beliggenheden af alle Skæringskurvens konstruerede Punkter i Udfoldningen. Asymptoternes Udfoldning findes derved, at deres Afstand fra den tilsvarende Frembringer, som giver det uendeligt fjerne Punkt, ikke forandres (da de ligge i samme Tangentplan til Fladen).

Angaaende Betingelsen for, at Kurven i Udfoldningen faar et Vendepunkt, henvises til Prof. Seidelins Deskriptivgeom. § 146.

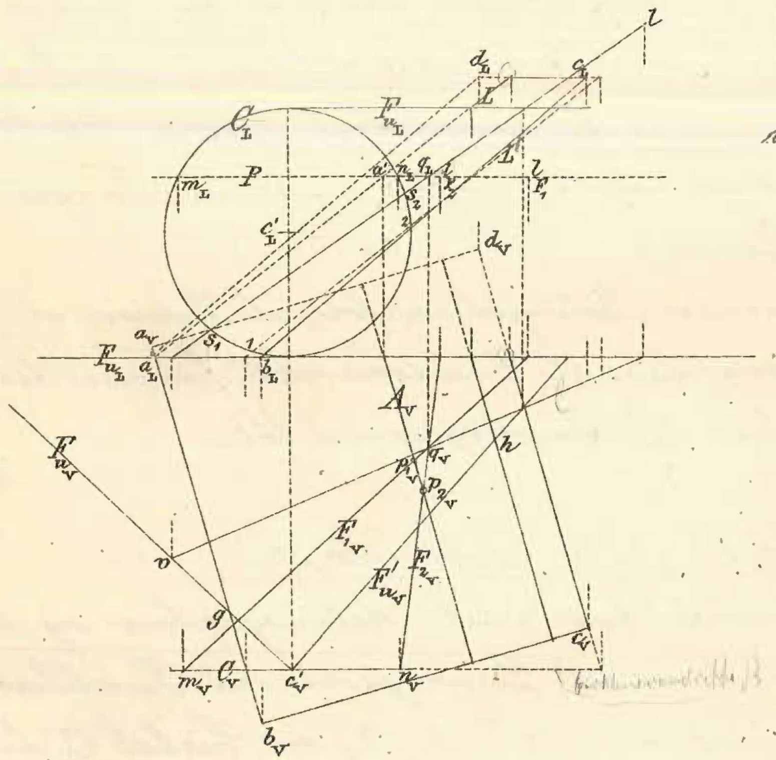
N° 41 [MB] Dobb. retv. Afb.

En Konoide har V til Retningsplan og til Ledelinier: 1) en ret Linie, givet ved Punkterne l: (140, 0, 79) og o: (0, 52, 0). 2) en Cirkel C, beliggende i en Frontplan, og med Centrum c': (37, 80, 32), Radius r = 32

Der söges Skæringskurven mellem Konoiden og en Plan, bestemt ved Punkterne a, b, c og d; ab er Spor i V, cd Spor i en vandret Plan, bestemt ved $z = 72{,}5$. Firkanten abcd er et Rektangel.

a: (1, -2, 0), b: (28, 94, 0), $b_V c_V = 91$

Konoiden tænkes kun eksisterende mellem L og Cirklens Plan.



En Konoide er en vindskæv Flade, der frembringes af en ret Linie, som glider paa to Ledelinier (hvoraf den ene er en ret Linie), og er parallel med en Ledeplan. Fladen kaldes vindskæv, fordi

J. Chr. Jensen.

to paa hinanden følgende Frembringere i Almindelighed ikke skære hinanden, saaledes som Tilfalaldet er med en udfoldelig Flade, der altsaa i Modsætning til en vindskæv bestaar af plane Elementer.

I den foreliggende Opgave blive Frembringerne altsaa vandrette Linier, og vi kunne let bestemme dem, som ligge i en vilkaarlig vandret Plan, hvis lodrette Spor er P; denne Plan vil nemlig skære Cirklen C i Punkterne m og n, Ledelinien i Punktet q; Linierne mq og nq ere da de to Frembringere F_1 og F_2, som ligge i Planen. Samme vandrette Plan skærer den givne Plan abcd i Linien A, hvis lodrette Spor a' paa den givne Plans Spor L straks haves, og A skærer atter F_1 og F_2 i Punkterne p_1 og p_2 af den søgte Skæringskurve.

For hver Gang vi saaledes finde et Par Frembringere F af Konoiden, konstrueres deres lodrette Spor l_{F_1} og l_{F_2} og Kurven, dannet af disse Punkter, Konoidens Spor i L, tegnes.

Vi se, at gennem hvert Punkt paa Ledelinien gaar der to Frembringere; Ledelinien er med andre Ord en Skæringslinie mellem Fladens to Net; derfor vil i det Punkt, hvor

Ledelinien skærer Snitplanen, to Punkter p_1 og p_2 falde sammen. Skæringskurven faar her et Dobbeltpunkt.

Tænke vi os nu den vandrette Plan med Spor P parallelforskudt, faa vi for hver Stilling to Frembringere F_1 og F_2, som skære hinanden paa Ledelinien og gaa gennem de bevægelige Punkter m og n paa Cirklen; i Almindelighed ere disse to Frembringere ikke consecutive; kun hvis Planen lægges saaledes, at P tangerer Cirklens lodrette Billede, falde m og n sammen enten i Cirklens øverste eller dens nederste Punkt, og vi faa da i begge Tilfælde to consecutive Frembringere, der skære hinanden paa Ledelinien; Fladen faar her et Par udfoldelige Fladeelementer, hvis Centralpunkter ligge paa Ledelinien (se nedenfor), og Tangentplanerne langs disse ere to vandrette Planer; som Følge heraf faar Skæringskurven i Punkterne g og h (paa de to udfoldelige Frembringere) de vandrette Linier i Snitplanen til Tangenter. –

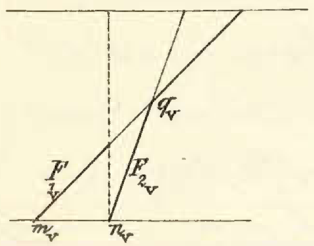
Det Punkt af en Frembringer, der har den korteste Afstand fra den consecutive Frembringer, kaldes Frembringerens Centralpunkt. For en udfoldelig Frembringer bliver altsaa Centralpunktet det Punkt, hvori den skærer den consecutive.

Punkterne 1 og 2 paa L', hvori Snitplanen skærer Cirklens Plan, samt de to Punkter, hvori Snitplanens lodrette Spor L skærer Konoidens Spor i lodret Billedplan, høre naturligvis med til den søgte Skæringskurve og ere dennes Spor i Cirklens Plan og i den lodrette Billedplan.

Punkterne s_1 og s_2, hvori Ledeliniens lodrette Billede skærer Cirklens lodrette Billede, ere de lodrette Billeder af to Frembringere, der staa vinkelret paa lodret Billedplan; de Punkter af Skæringskurven, der ligge paa disse Frembringere, afbildes følgelig ogsaa lodret i s_1 og s_2, ligesom forøvrigt enhver Kurve paa Fladen, som skærer de nævnte to Frembringere, vil have sit lodrette Billede gaaende gennem s_1 og s_2; saaledes ethvert plant Snit, naar det ikke netop er vinkelret paa L. Fladens Spor i L vil altsaa ogsaa gaa gennem s_1 og s_2.

For hver Gang, man har anvendt en vandret Hjælpeplan til at finde et Par Punkter p_1 og

P_2 af Skæringskurven, kunne vi let med det samme afgøre, hvorvidt disse Punkter ligge paa den Del af Skæringskurven, der er synlig i lodret Billede, eller ej. Hvis de to Frembringere F_1 og F_2 f. Eks. have den i hosstaaende Fig. viste Stilling, indses det, at Punkter, der ligge paa de stærkt optrukne Dele af Frembringerne ere synlige i lodret Billede, og paa lignende Maade afgøres det samme Spørgsmaal for alle andre Stillinger.



Man ser, at Punktet q af Ledelinien ikke i lodret Billede kan skjules af Fladen selv; Ledeliniens lodrette Billede trækkes altsaa op, for saa vidt den ikke er skjult af Snitplanen. Det indses ogsaa umiddelbart, at Fladen selv ikke kan skjule noget Punkt af Ledelinien i det vandrette Billede, hvis Ledelinien ligger saaledes, at en lodret Plan gennem den ikke skærer Ledecirklen; er dette derimod Tilfældet, vil den Frembringer, der gaar igennem Skæringspunktet mellem denne lodrette Plan og Cirklen,

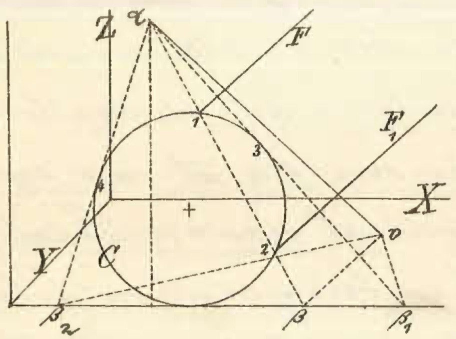
skjule den Del af Ledelinien, der ligger under Frembringeren.

Hvorledes Kurven skal trækkes op i vandret Billede afgøres, idet vi vælge os et eller andet Punkt, for hvilket vi let kunne afgøre, at det f. Eks. hører til en synlig Del af Kurven; idet vi nu gaa ud fra dette Punkt, vil Kurven gaa over fra at være synlig til at være usynlig eller omvendt, hver Gang den enten passerer Fladens vandrette Omrids eller et Punkt af Ledelinien, hvis denne indtager en saadan Stilling, at Fladen selv ikke skjuler noget af den i det vandrette Billede; i det modsatte Tilfælde gaar Kurven ikke over fra at være synlig til at være usynlig ved at passere Ledelinien.

Naar en Flade frembringes af en eller anden Kurve, kan man bevise, at dens Billedomrids bliver Indhyllingskurve for Frembringerkurvens Billeder. Heraf følger, at Konoidens vandrette Omrids faas, idet vi tegne en Kurve, der tangerer alle Frembringernes vandrette Billeder (Røringspunkterne konstrueres ikke); specielt ville F_{uv} og F'_{uv} tangere Omridset i Billedet af de Punkter, der ligge paa Ledelinien, idet disse to Frembringere ere udfoldelige og have Centralpunkter paa Ledelinien (se Deskriptivgeom. § 214).

Asymptoterne til det vandrette Omrids ere Billeder af de udfoldelige Frembringere, der have deres Centralpunkter uendeligt fjærnt (Beviset herfor findes i Deskriptivgeometrien).

Disse Frembringere, der hver bestaa af to sammenfaldende parallele Frembringere, kunne findes saaledes (se hosstaaende Fig.):



Lad v være Ledeliniens vandrette Spor, α dens Spor i Cirklens Plan; vi kunne da finde et Par parallele Frembringere F og F_1 paa Fladen, idet vi gennem Ledelinien lægger en vilkaarlig Plan med Spor αβ i Cirklens Plan; αβ skærer Cirklen i Punkterne 1 og 2, og gennem disse Punkter gaa Frembringerne F og F_1 parallele med βv. F og F_1 ere ikke consecutive Frembringere, undtagen naar vi lægge αβ som Tangent til Cirklen; vi faa altsaa to udfoldelige Frembringere gennem

J Chr Jensen

Punkterne 3 og 4, henholdsvis parallele med $\beta_1 v$ og $\beta_2 v$; disse udfoldelige Frembringere have deres Centralpunkter uendelig fjærnt, og afbildes altsaa som Asymptoter til det vandrette Omrids.

Antage vi, at vi i ovenstaaende Fig. havde valgt Planen αβv saaledes, at βv var parallel med Snitplanens vandrette Spor, saa havde F og F_1 ogsaa været parallel hermed og altsaa med Snitplanen. Frembringerne F og F_1 give altsaa under denne Forudsætning de uendelig fjærne Punkter af Snitkurven; Tangentplanerne i disse uendelig fjærne Punkter ere de vandrette Planer (parallele med Ledepl.) gennem Frembringerne, og disse Planer skære altsaa Snitplanen i Skæringskurvens Asymptoter.

[FMB] VI Skruer og Tandhjul.

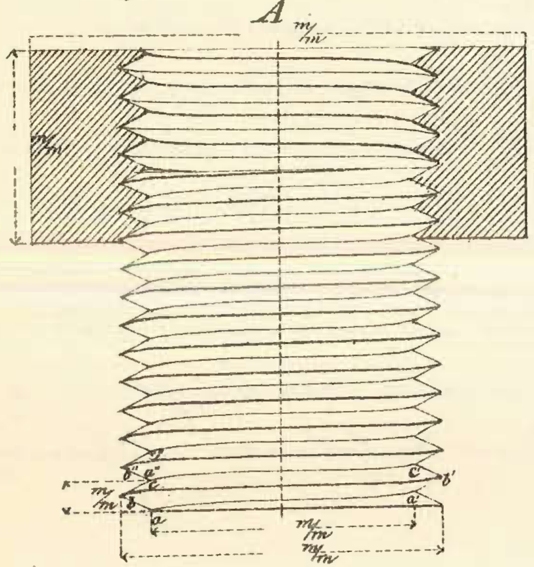
1) Skruer.

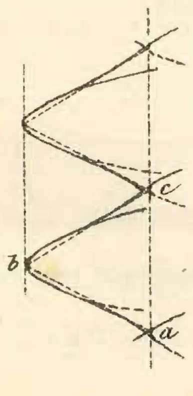
a) Skruelinien.

Konstruktionen af denne er omtalt i Opgave № 40. Aksen vælges lodret, Skrueliniens vandrette Omrids er en Cirkel med Radius r = 50 m/m, Skruegangshöjden er lig 55 m/m. Der tegnes Billedet af fire Skruegange.

b, <u>Den skarpgangede Skrue.</u>

Denne frembringes, idet en Trekant abc (almindelig ligebenet), som ligger i Plan sammen med, og hvis ene Side ac er parallel med Aksen A, skrues om denne, saaledes at dens Plan stadig gaar gennem A, og Skruegangshöjden er lig ac. Linierne ab og bc beskrive under Bevægelsen vindskæve Skrueflader, som begrænse Skruegangerne; disse Skrueflader skære hinanden i de Skruelinier, som beskrives af Punkterne a, b og c.





Skruefladernes Omrids ere krumme Linier, der tangere Skrueliniernes Billeder og Trekantsiderne. Skruens Omrids skulde altsaa, hvis vi vilde tegne

det nöjagtigt, vise sig omtrent som skitseret i foranstaaende Tegning. Vi tillade os imidlertid her et Par Tilnærmelser, idet vi for det förste erstatte de krumme Linier, der tangere Skrueliniernes Billeder med de rette Linier ab, bc, o.s.v., og for det andet tegne Skrueliniernes Billeder, der egentlig skulde have lodrette Tangenter i Punkterne a, b, c....., saaledes at de tangere Trekantsiderne ab, bc, ... i Punkterne a, b, c... Skruens Billede viser sig da saaledes, som vist i foranstaaende Fig.

Foroven forsynes Skruen med en Mötrik, som er skruet omtrent halvt ned paa Skruen; denne Mötrik er ved et Frontsnit gennem Skrueaksen delt i to Halvdele, hvoraf den forreste er borttaget, saaledes at Tegningen over Skruen viser det indvendige og den bageste Del af Mötrikken.

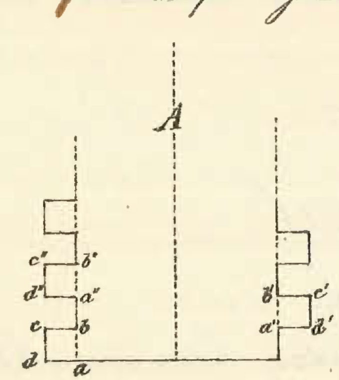
De gennemskaarne Dele af Mötrikken ere i Tegningen skraverede; dette sker <u>altid under en Vinkel paa 45°</u> med Tegningens Hovedretninger. Hvor flere gennemskaarne Metaldele i en Tegning stöde op til hinanden, skraveres de saa vidt muligt i forskellige Retninger; er det ikke muligt helt at gennemföre dette, for sættes Linierne i de to sammenstödende Skra= veringer i hvert Fald for hinanden. Bestaa de gennemskaarne Dele af forskellige Metaller, kan dette i Skraveringer angives ved en grovere el= ler finere Skravering.

Man vil lægge Mærke til, at Billederne af visse Kanter i Skruens og Mötrikkens Billeder ere trukne kraftigere op end andre. Denne Tryk= lægning sker efter fölgende Regler: Man anbrin= ger Tegningen foran sig, saaledes som den skal fremlægges for den, der skal betragte den, der= næst tænker man sig de forskellige Billeder, der findes paa Tegnepapiret erstattet med de Genstande, de forestille; disse Genstande belyses nu med parallele Lysstraaler, der komme ind fra oven og fra venstre i Forhold til Tegne= papiret og saaledes, at deres vandrette og lod= rette Projektioner danne Vinkler paa 45° med en vandret Projektionsakse.

Man lægger nu i visse Tilfælde Tryk i Bil= ledet af udadgaaende (konvexe) Kanter, og for at afgöre, i hvilke af dem der skal lægges Tryk,

deler man dem i to Klasser: 1) Kanter, der dan= ne Grænsen mellem to Flader, hvoraf kun den ene er synlig (Konturkanter); i disse lægges Tryk, hvis de begrænse Legemet i Retninger, der ven= de bort fra Lyset. Eksempler herpaa ere i Skruens Billede den vandrette Linie, som begrænser Skruen forneden, og den vandrette og lodrette Linie, der begrænser Mötrikken henholdsvis forneden og til= höjre. 2) Kanter som danne Grænsen mellem to synlige Flader; i disse lægges Tryk, hvis den ene Flade er belyst, den anden ubelyst; i foranstaaende Tegning f. Eks. i Billedet af den Skruelinie, Punktet b beskriver paa Skruen, og den, som a beskriver for Mötrikkens Vedkommende.

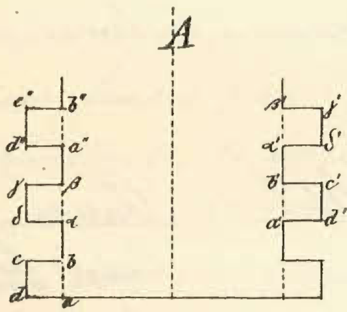
c. Den fladgangede enkeltlöbede Skrue.



Tænke vi os i Stedet for Trekanten abc i forrige Tegning et Rektangel abcd (i Reglen et Kvadrat)(ab ≠ A) beliggende i Skrueaksens Plan og skruet om denne, idet Skruegangshöjden er 2.ab=aa'', beskrives en enkeltlöbet fladganget Skrue ad og bc beskrive ogsaa her vindskæve Skrueflader, der sammen med Cylinderfladen, der beskri= ves af cd, begrænse Skruegangerne. De i forrige Tilfælde nævnte Unöjagtigheder ved Tegningen begaas ikke her.

d. Den fladgangede dobbeltlöbede Skrue.

Denne bestaar af to flade Skruegænger, anbragte paa samme Cylinder; den ene beskrives af abcd, den anden af $\alpha\beta\gamma\delta$; disse to Rektangler ere kongruente. Skruegangshöjden er lig $4 \cdot ab = aa''$. Dimensionerne kunne vælges som ved den fladgangede enkeltlöbede Skrue.

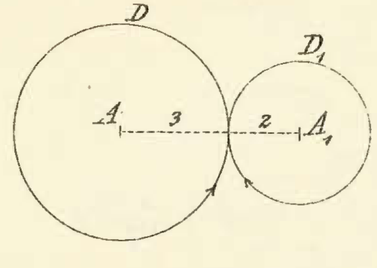


2) Tandhjul.

a. Cylindriske Tandhjul.

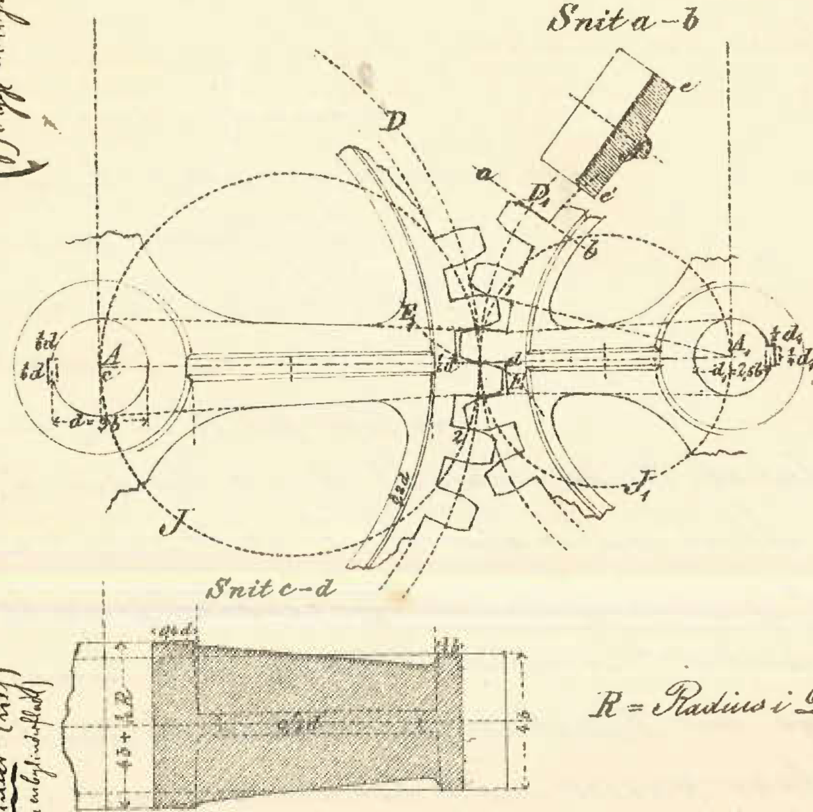
Disse Tandhjul anvendes, hvor en Aksel skal drive en anden, der er parallel dermed.

Lad i hosstaaende Figur, der er et Snit vinkelret paa Akslerne, A og A_1 være disse, og lad os antage, at A er den drivende Aksel, og at Omdrejningerne foregaa i de ved Pilene angivne Retninger. Man kunde da tænke sig Bevægelsen overfört fra A til A_1 ved



Hjælp af „Friktionshjul", d.v.s. to paa hver sin Aksel anbragte Hjul af Form som Omdrejningscylindre (Ledecirkler D og D_1), der under Bevægelsen stadig röre hinanden langs en Frembringer. Naar et saadant Hjulpar presses mod hinanden med tilstræk= kelig stor Kraft, vil det ene Hjul paa Grund af Friktionen tage det andet med sig rundt saaledes, at Periferihastigheden (d.e. Hastig= heden af Punkterne paa Ledecirklens Peri= feri) bliver den samme for begge Hjul. Akslernes Omdrejningsantal pr. Minut vil altsaa forholde sig omvendt som Ledecirk= lernes Radier.

Paa Grund af forskellige praktiske Ulem=



R = Radius i Delecirklen.

per ved Anvendelsen af Friktionshjul foretrækker man imidlertid, hvor det kan lade sig göre, at erstatte dem med Tandhjul. Disse konstrueres da saaledes, at Bevægelsen bliver den samme som ved Friktionshjulene; der skal altsaa i de to Tandhjul findes to (tænkte) Cylinderflader, der rulle paa hinanden. Cylindrenes Ledecirkler, D og D_1, kaldes her Dele=

cirklerne.

Der er dog en Betingelse, som maa være opfyldt, naar Friktionshjul skal kunne erstattes af Tandhjul. Thi medens ved Friktionshjul Ledecirklernes Periferier godt kunne være inkommensurable, er dette ikke Tilfældet ved Tandhjul. Delecirklerne maa her have et fælles Maal s (Stilen), svarende til en Tand + et Mellemrum.

Kaldes Tandbredden, maalt paa Delecirklen, b, tage vi her $b = \frac{1}{2} s$ (i Praksis tages den lidt mindre). Den Del af en Tand, som ligger udenfor den tilsvarende Delecirkel, kaldes Hovedet, den Del, som ligger indenfor, kaldes Foden.

Vi ville her holde os til en speciel Tandform, som ikke bruges ret meget, (her, hvor Formaalet kun er at tegne et Par Tandhjul, har dette jo mindre at sige); vi lade f. Eks. Radierne i Delecirklerne forholde sig som 3:2 og kunne nu forsyne det störste Hjul med 36, det mindste med 24 Tænder. Tandsnittet (ɔ: den Kurve, der faas, idet vi overskære en Tand med en Plan ⊥ Akslen) lade vi for det store Hjuls

Vedkommende være sammensat af en Epicy=
cloide E som Begrænsning for Hovedet og en Hy=
pocycloide (her specielt en ret Linie gennem Cen=
trum) for Foden. Epi- og Hypocloiden (den
rette Linie) frembringes henholdsvis idet „Ind=
grebscirklen“ J_1 ruller uden paa D og idet Ind=
grebscirklen J ruller inden i D; paa lignende
Maade faas Tandsnittet for det andet Hjul, sam=
mensat af en Epicycloide E_1 frembragt af J, der
ruller paa D_1 og en ret Linie (Hypocloide)
frembragt af J_1, der ruller inden i D_1.

Man lægger her Mærke til, at Hovedet for
det ene Tandsnit og Foden for det andet beskri=
ves af en og samme Indgrebscirkel, der ruller
henholdsvis uden paa den ene og inden i den
anden Delecirkel.

Man konstruerer kun de to i Tegningen
viste Cycloidebuer; alle andre Steder, hvor de
skulle anvendes, erstatter man dem med Cirkel=
buer, hvis Centrer her kunne vælges paa De=
lecirklerne, og hvis Radier bestemmes ved For=
søg saaledes, at enhver af Cirklerne saa nær
som muligt falder sammen med den Del

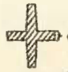
af vedkommende Cycloide, der skulde bruges
til Tandsnittet.

Som ovenfor nævnt anvendes almindelig
andre Tandformer; angaaende disse henvises
til Maskinlæren.

Idet nu J og J_1 ere de geometriske Steder
for Røringspunkterne mellem to Tandsnit, hen=
holdsvis nedenfor og ovenfor Centerlinien cd,
(heraf Navnet Indgrebscirkler) kunne vi sørge
for, at mindst to Par Tænder ere i Indgribning,
derved, at vi udvendig begrænse Tandsnittene
for de to Hjul med to Cirkler, henholdsvis gen=
nem Punkterne 1 og 2, der faas ved Skæring mel=
lem Indgrebscirklerne og de rette Linier, der
begrænse de to vedkommende Tænders Fod. De Cirk=
ler, der begrænse Mellemrummene ind mod Hjule=
ne, lægges saaledes, at der er et passende lille Spil=
lerum ($\frac{1}{10}$ af Stilen) mellem Hovedet af en Tand
og Bunden af det Mellemrum, hvori den gri=
ber ind.

Tænderne sidde nu fast paa Ringen,
hvis Tværsnit, der er vist skraveret i Snit a-b,
tilnærmelsesvis er rektangulært og styrket med

en Ribbe (e.f.e' er ikke en ret Linie, men sam=
mensat af to saadanne), kaldes ∠ e e' f for α, kan
man f. Eks. tage $tg\,\alpha = \frac{1}{16}$; dette göres for Stöb=
ningens Skyld, idet Modellen til Hjulet da
bedre slipper Formen, hvori dette skal stöbes;
af Tegningen vil det fremgaa, at flere andre
Grænseflader ligeledes ere skraa, og den til=
svarende spidse Vinkel kan da vælges ens for
dem alle).

m. : H Ringen befæstes til Navet, der atter omslut=
ter Akslen, ved Hjælp af Armene; af disse kunne
vi her give det störste Hjul 5, det mindste 4.
Armenes Tvarsnit er korsformet  δ den ene
Ribbe, Hovedribben, ligger sædvanlig i Hjulets
Midterplan, dens Tykkelse δ er lig Tykkelsen
af den Ribbe, der löber rundt langs Ringen,
og de gaa ude ved Ringen over i hinanden;
den anden Ribbe, Sideribben, tjener til at
give Hjulet Sidestivhed; de Planer, der be=
grænse den, ere skraatstillede, som ovenfor nævnt.
Hvorledes endelig Navet er indrettet vil frem=
gaa af Tegningen. Alle Dimensioner kunne
vælges som opgivet.

Ved Udförelsen tegnes to Billeder af Hjule=
ne; i det förste, der som ovenfor forestiller en
Projektion paa en Plan ⊥ Akslerne, tegnes Hjule=
ne fuldstændigt; i det andet, (hvoraf Snit c d er
et Brudstykke, og som forövrigt er en Projek=
tion paa en Plan, der er parallel med den,
der bestemmes af Akslernes Midtelinier) tæn=
kes alt, hvad der ligger indenfor de tre stiple=
de Linier, bortskaaret.

Format: 53 × 34½ cm.

b. Koniske Tandhjul.

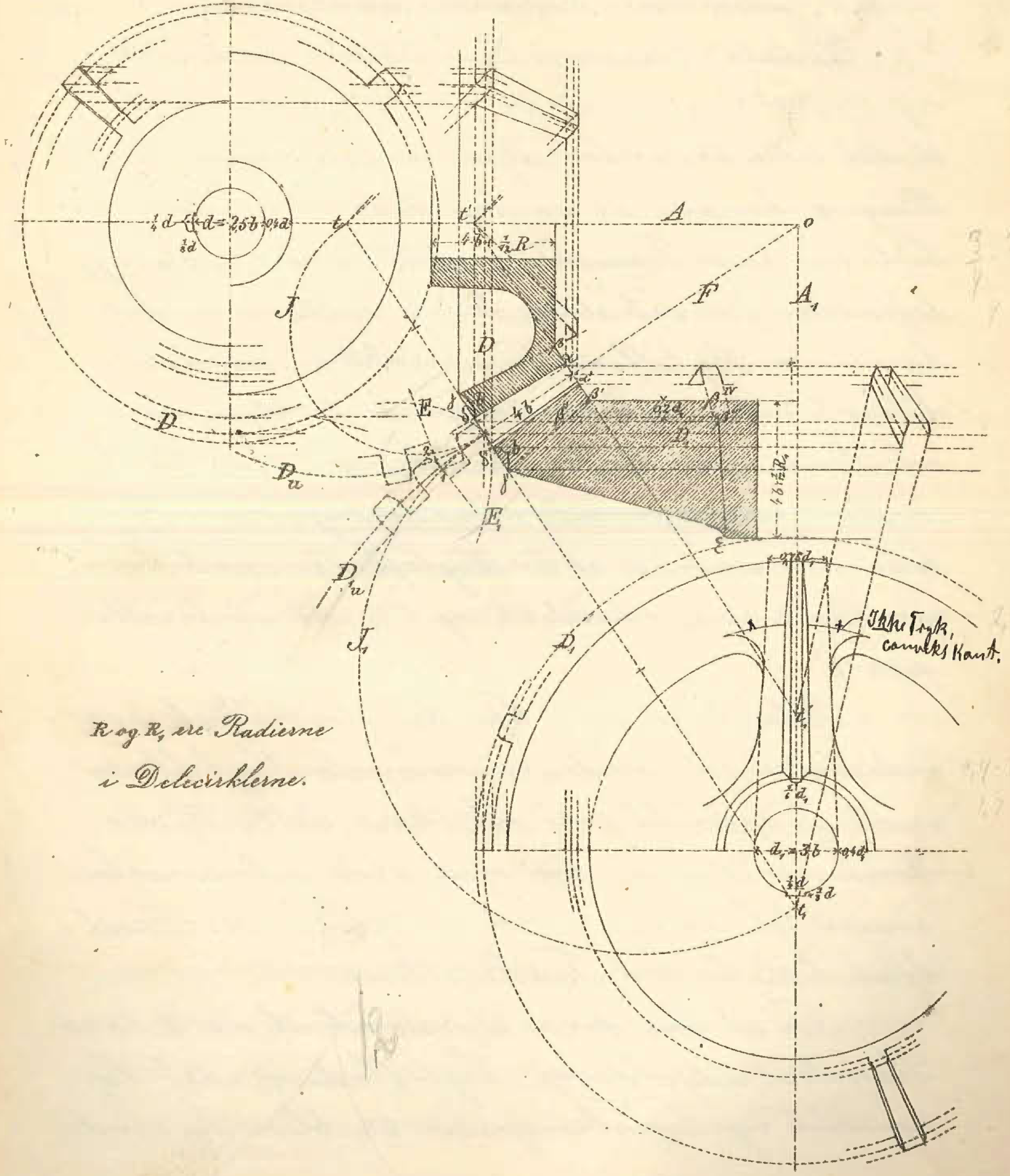
Disse Hjul tjene til at overföre en omdrej=
ende Bevægelse, fra en Aksel A til en anden
Aksel A_1, som skærer den förste under en el=
ler anden Vinkel; denne Vinkel ville vi her
forudsætte lig 90°, hvilket almindelig er Til=
fældet.

Vi kunne ligesom i forrige Opgave
tænke os Bevægelsen overfört ved Hjælp af et
Par Friktionshjul, der her gives Form af Om=
drejningskegler med Akserne A og A_1 og en fæl=
les Frembringer F. Det indses, at disse Kegler
under Bevægelsen kunne rulle paa hinanden,

uden at der i noget Punkt kommer Glidning. Overskæres Keglerne med en Kugle, der har Centrum i deres fælles Toppunkt, blive Skæringskurverne to Cirkler, D og D_1, der ligeledes rulle paa hinanden; Forholdet mellem Akslernes Omdrejningsantal er altsaa det omvendte af Forholdet mellem D og D_1's Periferier.

Naar nu Friktionshjulene skulle ombyttes med koniske Tandhjul, skulle disse konstrueres saaledes, at de give samme Bevægelse som Friktionshjulene. Det er her ligesom ved cylindriske Tandhjul nödvendigt, at D og D_1 (som nu kaldes Delecirklerne) have et fælles Maal s (Stilen), svarende til en Tand + et Mellemrum; vi vælge ogsaa her Tandbredden b, maalt paa Delecirklen, lig $\frac{1}{2}s$ (i Praksis göres den lidt mindre, saaledes at et Mellemrum er lidt bredere end den Tand, der griber ind deri).

Vi ville her ligesom ved de cylindriske Tandhjul holde os til en lignende speciel Tandform (Cycloide som Begrænsning for Hovedet, Foden retlinet), der ikke bruges ret



R og R₁ ere Radierne i Delecirklerne.

meget, uden hvor Trætander anvendes.

Vi lade Radierne i Delecirklerne forholde sig som 2:3 og kunne da give det store Hjul 36, det lille 24 Tander. Hjulene (d. Tænderne og Ringen, hvorpaa de ere befæstede) begrænses bort fra deres Toppunkt o af to Omdrejningskeglefladerr; for det store Hjuls Vedkommende har denne Kegleflade Toppunktet t_1, for det lilles Vedkommende Toppunkt t; tt_1 er en ret Linie og en fælles Frembringer i de to Kegler; paa lignende Maade begrænses Hjulene ind imod O af to Keglefladerr med Toppunkter t' og t'_1; baade tt_1 og $t't'_1$ ere vinkerette paa F.

Betragte vi nu f. Eks. det store Hjul, saa indses det let, at den ovennævnte Kegleflade med Toppunkt i t_1 vil skære dette Hjuls Tænder i Kurver, der med stor Tilnærmelse svarer til dem, vi ved de cylindriske Tandhjul kaldte for Tandsnittene.

For at faa disse Tandsnit at se i sand Störrelse udfolde vi Keglefladen, idet Toppunktet og Frembringeren tt_1 blive liggende;

Delecirklen D_1 udfoldes da som Cirklen D_{1u} med Centrum i t_1. Paa samme Maade behandles den tilsvarende Kegleflade ved det andet Hjul, hvis Delecirkel D udfoldes som D_u. Man kan nu bevise, at Tandsnittenes Udfoldning her konstrueres aldeles paa samme Maade som vist ved de cylindriske Tandhjul, idet vi benytte Indgrebscirklerne J og J_1 og Delecirklerne D_u og D_{1u}. Tandsnittenes Udfoldninger begrænses udefter med to Cirkler, der ligesom tidligere lægges gennem Punkterne 1 og 2, og Bunden af Mellemrummene dannes af Cirkler, der lægges saaledes, at der er et passende Spillerum (ca. $\frac{1}{10}S$) for den deri indgribende Tand.

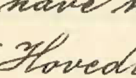
Af hvert Hjul tegnes nu to Billeder, det ene, der er en Projektion paa en Plan parallel med A og A_1, viser Hjulene i Indgribning med hinanden, det andet er for hvert Hjuls Vedkommende en Projektion paa en Plan vinkelret paa den tilsvarende Aksel. I det förste Billede tænkes $\frac{1}{4}$ af hvert Hjul bortskaaret (angivet ved de stiplede Linier i de andre Billeder), saaledes at man her ser den bageste Del af

Tandhjulene. I de to andre Billeder er hvert Hjul ved et Diametralsnit, parallelt med A og A_1, delt i to Halvdele, og den ene Halvdel er drejet 180°, saaledes at man her faar Hjulet at se fra den modsatte Side.

Vi skulle nu blot folde de ovenfor kon= struerede Tandsnit tilbage paa Keglerne igen, og hvorledes dette sker, fremgaar af Tegningen. Alle Cirkler f. Eks. om t_1 som Centrum, foldes atter op paa Keglen som Cirkler, hvis Planer staa vinkelrette paa Akslen A_1; disse Cirkler vise sig i det Billede, der er en Projektion paa en Plan parallel med A og A_1, som ret= te Linier, og i en Projektion paa en Plan vinkelret paa A_1 som Cirkler, og her i dette Billede, ville Stykker af disse Cirkler vise sig i sand Störrelse, altsaa lige saa store som de tilsvarende Dele i Udfoldningen.

Hvorledes nu Billederne af Tænderne faas, vil indses ved Betragtning af Figuren; spe= cielt bemærkes, at i den fælles Projektion ville Billederne af Tænderne paa den ba= geste Del af et af Hjulene (udfor den bort=

skaarne Fjerdedel) vare symmetriske (m. Hensyn til Akslen) med Billederne af de paa den for= reste ikke bortskaarne Del.

Alle Dimensioner kunne vælges som an= givet. Ringene, hvorpaa Tænderne sidde fast, beskrives her af Trapezerne $\alpha\beta\gamma\delta$ og $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, idet disse drejes om deres respektive Aksler. Ringene befæstes til Navet, for det store Hjuls Vedkommende ved fire Arme, for det lille Hjuls Vedkommende ved en massiv Plade, hvis Gennemsnit ses af Fig. Armene i det store Hjul have her  formet Tværsnit; Ribben pq (Hovedribben), hvis Tykkelse her er valgt lig 0,2d_1, tjener til at overföre Omdrejnings= momentet til Akslen, Ribben mn (Sideribben) tjener til at give Hjulet Stivhed; et Frontsnit gennem Akslen vilde skære Hovedribben i en af de ikke tegnede Arme i Firkanten $\beta'\beta''\beta'''\beta^{IV}$, den vilde skære Sideribben i $\beta''\beta'''\varepsilon\gamma$; en af Ar= mene er ogsaa tegnet i Projektionen paa en Plan $\perp A_1$.

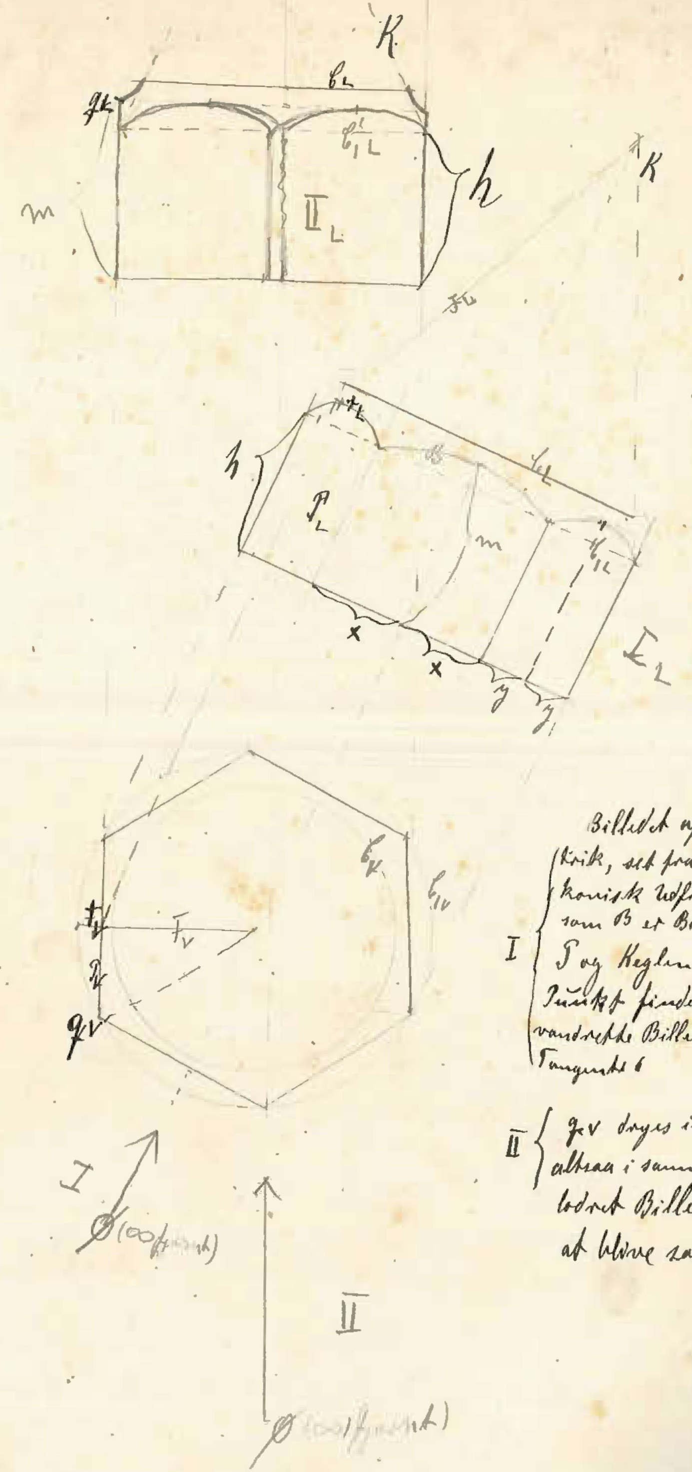
Navets Indretning fremgaar af Figuren.

d 24 April 1901

J. K. Danö

Rettelser.

Side VII,	Linie 1 f.n.	Medtræk	læs	Nedtræk
" VIII,	—"— 9 f.n.	Rdering	"	Radering
" X,	—"— 7 f.n.	e f	"	ef
" XI,	den første Fig. skal se saaledes ud: a———o———b			
" XV,	Linie 5 f.o.	efte	læs	efter
" 1	—"— 4 f.o.	folgende	"	fölgende
" "	—"— 12 f.o.	alle	"	Alle
" 14	—"— 5 f.o.	Periferien b	"	Periferien, b
" 38	—"— 8 f.o.	, den	"	; dens
" 39	—"— 3 f.o.	Complimentvinkel	"	Complementvinkel
" 69	—"— 2 f.o.	Centrum, og	"	Centrum og
" 84	—"— 6 f.n.	h_1	"	h
" 96	i Fig. 2a mangler to Maal: $ö_n q_n = 500$ og $q_n a' = 100$			
" 99	i Fig. 2c mangler Betegnelsen U_2 ved Linien $u_3 u_4$			
" 108	Linie 8 f.o.	har har	læs	har
" 115	—"— 9 f.n.	retlinet	"	retliniet
" 117	—"— 5,6,7 f.o.	Tilføjelsen (i Fig. er.... Omridsfrembringere) bortfalder		
" 119	i Fig. mangler Betegnelsen n_s ved Punktet n_3''s Skygge			
" 122	Linie 11 f.n.	q_1	læs	q_1,
" 135	—"— 1 f.n.	Skaaret	"	skaaret
" 171	" 2 f.o.	Tilfalaldet	"	Tilfældet
" 183	" 9 f.n.	en	"	ene



I { Billedet af en alm. 6-Kantet Skruemøtrik, set fra to Sider (I og II). b-b_1 er en konisk Udfræsning, de krumme Linier som B er Billeder af Skæring mell. Planen P og Keglen K (en Hyperbel). Det øverste Punkt findes ved at tegne Frembl. F_v, hvis vandrette Billede er L [illegible] Spor [illegible] Tangent b

II { q_v drejes ind i Frontpl. F_v, kommer altsaa i samme Højde som t_L, følgelig lodret Billede i $\mathfrak{P}_L$; II_L ses nu let at blive som Figuren viser.